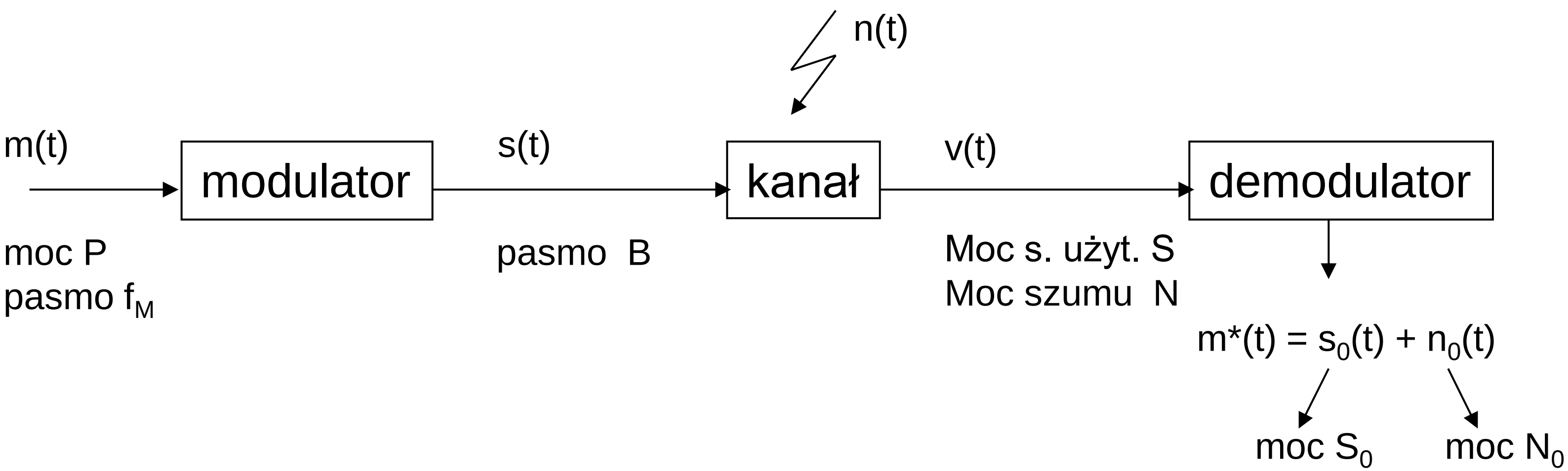
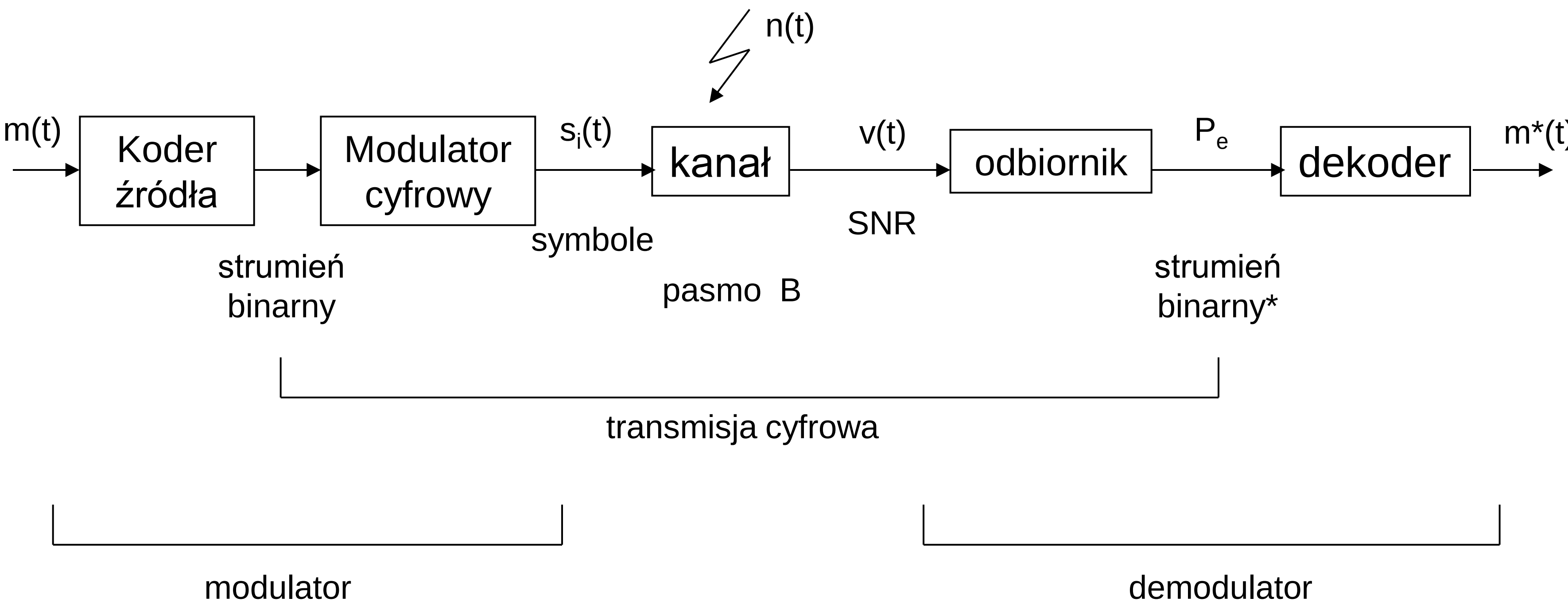
Modulacja, demodulacja (transmisja sygnałów analogowych)



SNR:

- na wyjściu kanału SNR = S/N
- na wyjściu odbiornika $SNR_0 = S_0/N_0$

Transmisja cyfrowa sygn. analogowych



P_e=BER= prawdopodobieństwo przekłamania

PTC

Porównanie modulacji (kryteria)

- Koszt: pasmo w kanale B, przepływność binarna [bit/s]
  efektywność widmowa [bit/s/Hz]

- Jakość sygnału na wyjściu odbiornika:
  $SNR_0=S_0/N_0$ $P_e=BER$

dla transmisji cyfrowej

- Odporność na zakłócenia: $SNR_0=f(SNR)$ $P_e=f(SNR)$
  gdzie $SNR=S/N$
  S – moc sygn. użytecznego na wyjściu kanału
  N – moc szumu na wyjściu kanału

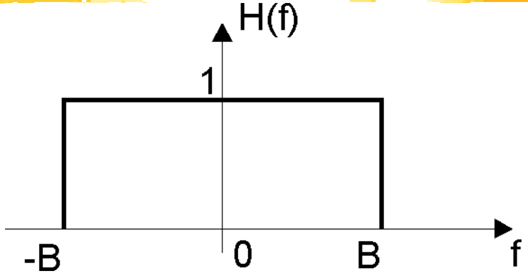
Dla kanału z szumem białym (AWGN) $N = \eta B$
lub $N = \eta f_M$
gdzie η – gęstość mocy szumu

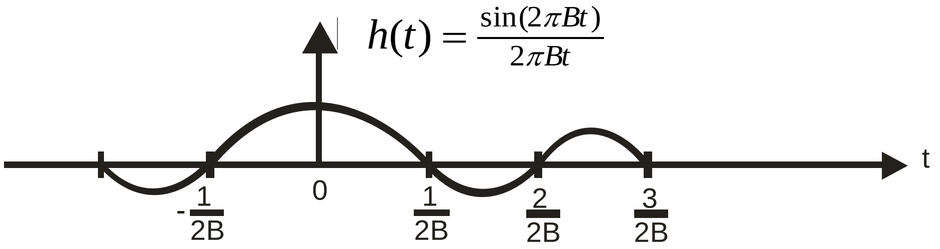
Wartości graniczne

- Największa szybkość modulacji (Bd) bez interferencji międzysymbolowych
- Największa szybkość transmisji [bit/s] bez błędów binarnych (BER=0)
- Graniczna efektywność widmowa [bit/s/Hz]
- Graniczna odporność na zakłócenia: $SNR_0=f(SNR)$

Przepustowość kanału

Weźmy np. kanał dolnopasmowy:
pasmo B [Hz]
moc szumu N = ηB [W]
moc sygnału użytecznego S [W]
SNR = S/N



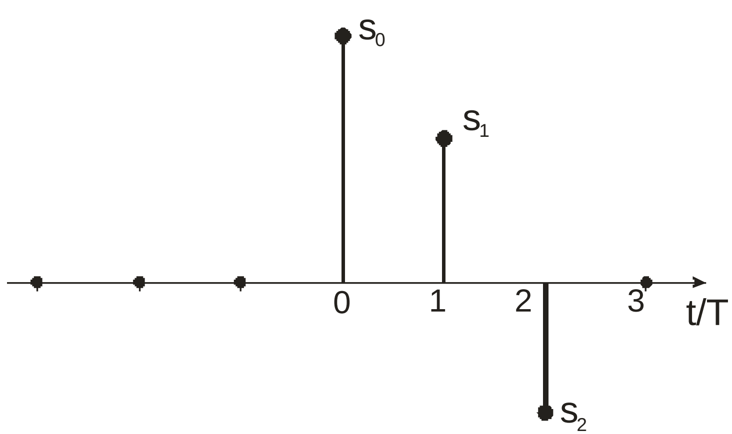


Przepustowość: graniczna szybkość [bit/s] bezbłędnej transmisji

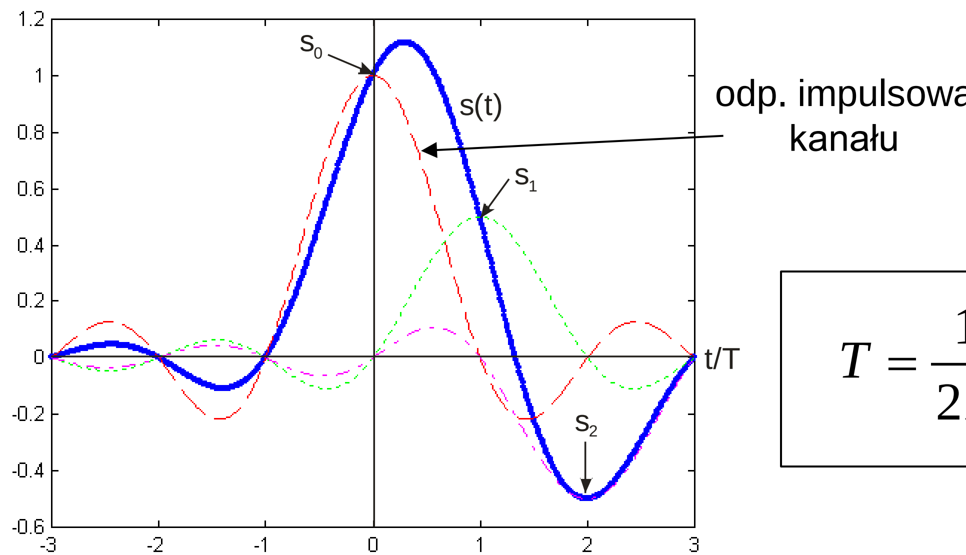
Wysyłamy wiadomość: $\bar{S} = S_0, S_1, \ldots, S_{k-1}$ (np. próbki sygnału)

Graniczna szybkość modulacji* - Tw. Nyquista

*liczba symboli przesyłanych w 1s



wejście kanału



wyjście kanału

$$T = \frac{1}{2B}$$

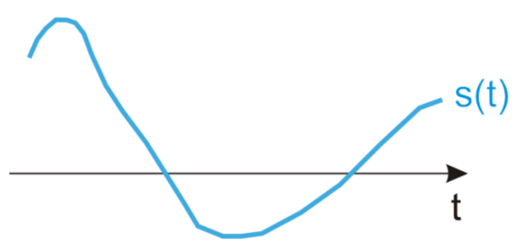
Można przesłać 1/T = 2B symboli na sekundę bez interferencji międzysymbolowych

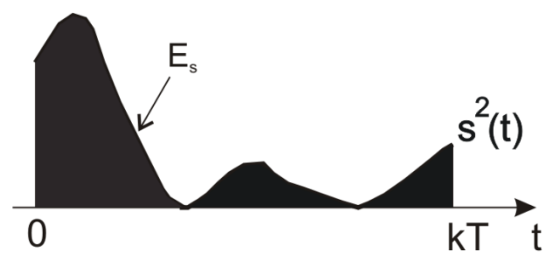
Transmisja z szumem

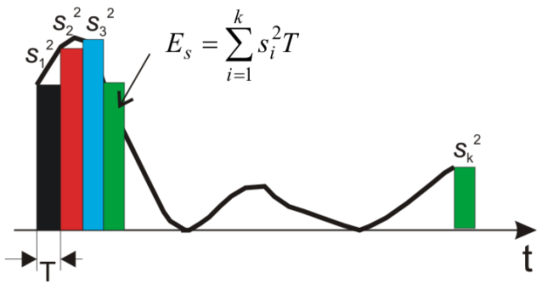
W ciągu *kT* sekund transmitujemy wiadomość (wektor $\overline{s} = s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$)

i odbieramy $\overline{v} = \overline{s} + \overline{n}$ gdzie $\overline{n} = n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$ - próbki szumu.

Kwadrat normy $||\overline{s}||^2 = \sum_{i=0}^{k-1} s_i^2 = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{k-1}(s_i^2 T) = \frac{1}{T} E_s$ gdzie E_s – energia zużyta do transmisji wiadomości.







Transmisja z szumem

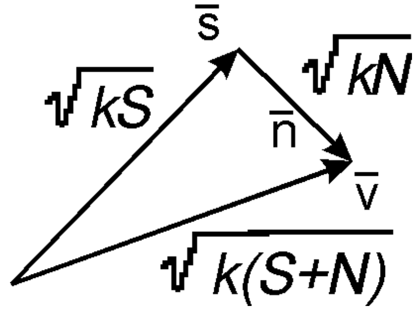
W ciągu *kT* sekund transmitujemy wiadomość (wektor $\bar{s} = s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$)

i odbieramy $\bar{v} = \bar{s} + \bar{n}$ gdzie $\bar{n} = n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$ - próbki szumu.

Kwadrat normy $\|\bar{s}\|^2 = \sum_{i=0}^{k-1} s_i^2 = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{k-1}(s_i^2 T) = \frac{1}{T}E_s$ gdzie E_s – energia zużyta do transmisji wiadomości.

Gdy *k* >>1, $E_s \approx SkT$, gdzie *S* – średnia moc przesyłanego sygnału. Stąd $\|\bar{s}\|^2 \approx kS$

Podobnie $\|\bar{n}\|^2 \approx kN = k\eta B$ oraz $\|\bar{v}\|^2 = \|\bar{s}+\bar{n}\|^2 \approx k(S+N)$



PTC

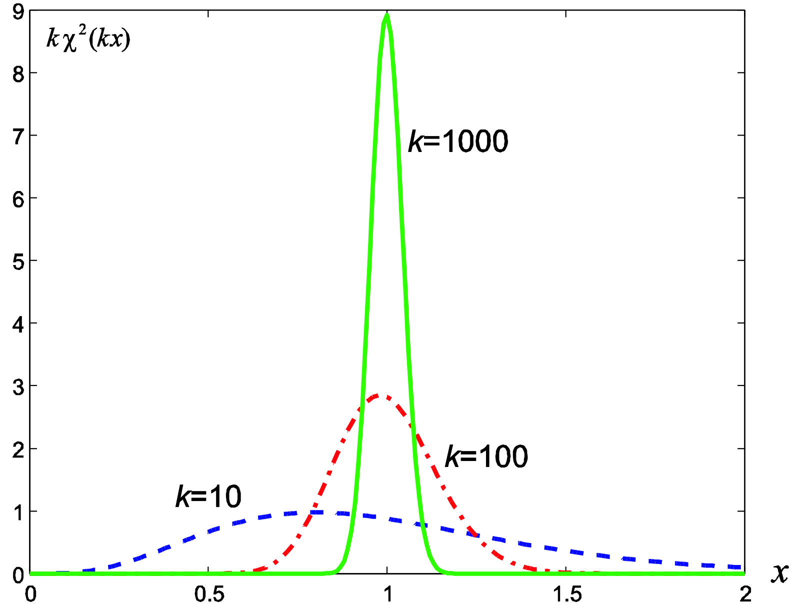
Interpretacja geometryczna

Właściwości wektora próbek szumu $\overline{n}$:

$$||\overline{n}||^2 = \sum_{i=0}^{k-1} n_i^2$$ - rozkład chi- kwadrat o *k* stopniach swobody

(gdy n_i - są niezależne i mają rozkłady gaussowskie o wartości średniej =0 i wariancji=1)

Rozkład $\frac{1}{k}||\overline{n}||^2$: →



→ Końce wektorów szumu leżą

przy powierzchni kuli

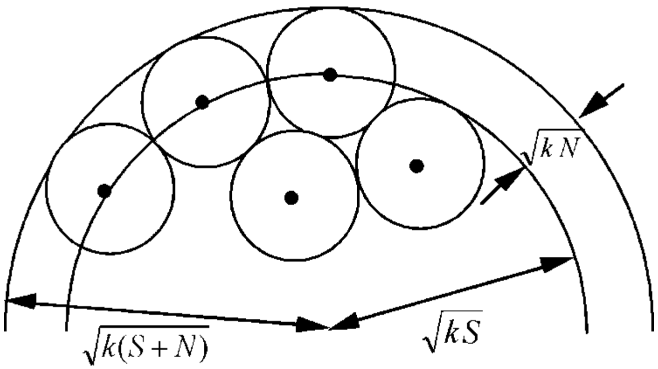
o promieniu $||\overline{n}|| = \sqrt{kN}$

PTC

Pakowanie sfer

Wiadomości można odbierać bez błędu, jeśli odległość między nimi

będzie większa niż $2\,||\bar{n}\,|| = 2\sqrt{kN}$



Ile k-wymiarowych kul o promieniu $r=(kN)^{0.5}$
mieści się w kuli o promieniu $R=[k(S+N)]^{0.5}$?
Tyle, ile wynosi stosunek ich objętości, a więc

$$[\tfrac{R}{r}]^k = [\tfrac{S+N}{N}]^{k/2} = [1+\tfrac{S}{N}]^{k/2}$$

gdyż objętość k-wymiarowej kuli jest proporcjonalna do r^k

W ten sposób można przesłać bez błędu $\log_2[1+\frac{S}{N}]^{k/2} = \frac{k}{2}\log_2[1+\frac{S}{N}]$ bitów.

Transmisja trwała $kT = \frac{k}{2B}$ sekund, a więc na sekundę przypada $B\log_2(1+\frac{S}{N})$ bitów .

PTC

Tw. Shannona o przepustowości kanału

Przepustowość kanału: $C = B\log_2(1+\frac{S}{N}) = B\log_2(1+\frac{S}{\eta B})$ [bit/s]

- Gdy $\frac{S}{N} \to \infty$, to $C \to \infty$
- Gdy *B* -> 0, to *C* -> 0
- Gdy $B \to \infty$, to $C = B\log_2(1+\frac{S}{\eta B}) = \frac{S}{\eta}\log_2(1+\frac{S}{\eta B})^{\frac{\eta B}{S}} = \frac{S}{\eta}\log_2 e$

  ponieważ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

  C osiąga wówczas maksimum, mimo że $N = \eta B \to \infty$.

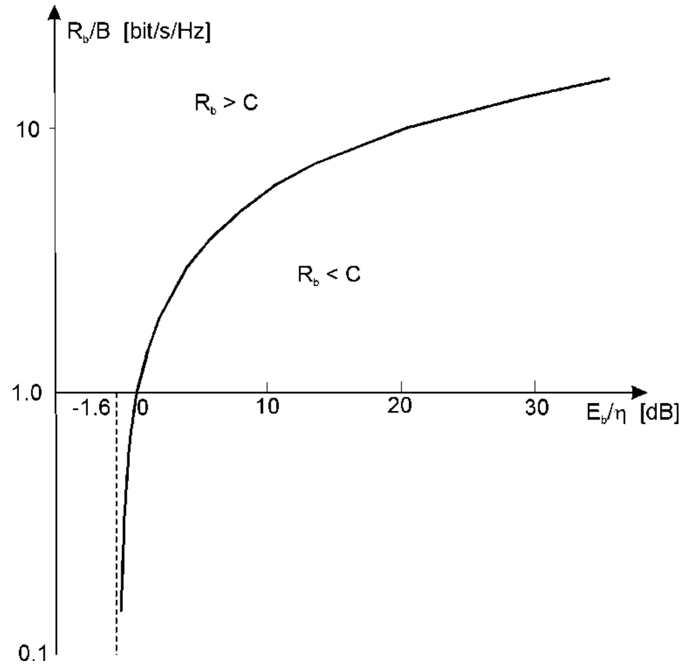
Efektywność widmowa

R_b – szybkość transmisji [bit/s],
R_b/B – efektywność widmowa [bit/s/Hz]
E_b – energia zużyta na transmisję 1 bitu [J=Ws]

Dla granicznej szybkości transmisji $R_b = C = B\log_2\left[1+\frac{S}{N}\right] = B\log_2\left[1+\frac{E_b R_b}{\eta B}\right]$

$$\frac{R_b}{B} = \log_2\left[1+\frac{E_b R_b}{\eta B}\right]$$

$$\frac{E_b}{\eta} = \frac{B}{R_b}\left[2^{\frac{R_b}{B}} - 1\right] \longrightarrow$$



Gdy $B \to \infty$, to

$E_b/\eta \to \ln(2)$ czyli -1.6 dB

Graniczna odporność na zakłócenia

$$SNR_0 \leq \left[1 + \frac{f_M}{B} SNR\right]^{\frac{B}{f_M}} - 1$$

B/f_M – współczynnik poszerzenia pasma
(f_M – pasmo sygnału przed modulacją, B – pasmo sygnału w kanale)

Tutaj $SNR = \dfrac{S}{N} = \dfrac{S}{\eta f_M}$

Dla $B/f_M = 1$, SNR_0 =< SNR

Graniczna odporność na zakłócenia

Graniczna szybkość transmisji w kanale:

$$C = B\log_2(1+\frac{S}{\eta B}) = B\log_2(1+\frac{f_M}{B}\frac{S}{\eta f_M}) = B\log_2(1+\frac{f_M}{B}SNR)$$

Szybkość transmisji na wyjściu odbiornika:

$$C_0 = f_M \log_2(1+SNR_0)$$

Ponieważ $C_0 \le C$ otrzymuje się

$$\log_2(1+SNR_0) \le \frac{B}{f_M}\log_2(1+\frac{f_M}{B}SNR)$$

$$\log_2(1+SNR_0) \le \log_2(1+\frac{f_M}{B}SNR)^{\frac{B}{f_M}}$$

$$1+SNR_0 \le (1+\frac{f_M}{B}SNR)^{\frac{B}{f_M}}$$

$$SNR_0 \le (1+\frac{f_M}{B}SNR)^{\frac{B}{f_M}} - 1$$

Graniczna odporność na zakłócenia