POLITECHNIKA WARSZAWSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI I TECHNIK INFORMACYJNYCH
INSTYTUT TELEKOMUNIKACJI

ZAAWANSOWANE TECHNIKI PRZETWARZANIA SYGNAŁÓW W TELEKOMUNIKACJI – LABORATORIUM

ĆWICZENIE NR 3 – GENERACJA I ANALIZA SYGNAŁÓW PSEUDOLOSOWYCH

WARSZAWA 2012

Wstęp

Analiza jakości systemów telekomunikacyjnych wymaga przyjmowania modeli występujących w nich sygnałów oraz samych systemów. Sprowadza się to do określania funkcji, opisujących właściwości sygnałów i przekształceń, którym podlegają one w systemie. Współczesne systemy wykorzystują złożone sygnały, które w systemach podlegają licznym i złożonym przetworzeniom. Dlatego bardzo często modele zarówno sygnałów jak i systemów mają skomplikowane postaci a ich analizowanie nastręcza poważne trudności. W bardzo licznych przypadkach jedynym, praktycznie akceptowalnym rozwiązaniem problemu analizy jakości systemów jest komputerowa symulacja systemów i zachodzących w nich procesów. Symulacyjne podejście do zagadnienie wymaga rozwiązania problemu symulacji sygnałów, które są danymi dla realizowanych w systemie przetworzeń.

Symulacje sygnałów polegają na wytwarzaniu ciągów liczb losowych. Istotne zatem znaczenie ma formułowanie odpowiednich algorytmów, umożliwiających wyznaczanie za pomocą określonych procedur obliczeniowych ciągów takich liczb, które miałyby znamiona upodobniające je do realizacji zadanych zmiennych losowych. Jest jednak oczywiste, że efektem obliczeń, wykonywanych przez program komputerowy, dla którego dane mają deterministyczny charakter, może być zbiór liczb, które trudno nazwać losowymi. Można jednak tak skonstruować program aby wytwarzane w nim liczby tworzyły ciągi okresowe o bardzo dużych okresach, które byłyby pozbawione jakiejkolwiek zauważalnej regularności. Ten brak regularności można traktować jako przejaw braku zależności między dowolą parą elementów ciągu, między którymi odległość jest mniejsza niż długość okresu. Jednocześnie duża wartość długości okresu ciągu uniemożliwia praktycznie zaobserwowanie powtarzalności, która w ciągu okresowym jest oczywista. Liczby w takim ciągu są nazywane niezależnymi liczbami pseudolosowymi a komputerowe programy, które je wytwarzają - generatorami liczb (pseudo)losowych. Często opuszcza się przedrostek pseudo- mówiąc o generatorach liczb losowych. Ciągi liczb losowych złożone z N elementów można charakteryzować częstościami n/N, z jakimi trafiają one do zadanych przedziałów wartości $\Delta l=[l_1,l_2]$. Jeżeli utożsamiać wartości samych liczb z realizacjami pewnej zmiennej losowej X, to częstości trafiania do przedziału $\Delta l=[l_1,l_2]$ można porównywać z prawdopodobieństwami przyjmowania przez zmienną X wartości z przedziału Δl. Z oczywistych powodów wytwarzane programowo liczby muszą mieć skończone wartości i zawsze można określić krańce l_{min} i l_{max} przedziału $\Delta L=[l_{min},l_{max}]$, wewnątrz którego znajdują się wszystkie możliwe liczby. Szczególne znaczenie w symulacjach komputerowych mają ciągi liczb losowych, które trafiają do dowolnego podprzedziału $\Delta l_i=[l_{1i},l_{2i}]$ o stałej długości ze stałą częstością. Ciągi takich liczb można traktować jak ciągi realizacji zmiennej losowej o rozkładzie równomiernym na przedziale $\Delta L=[l_{min},l_{max}]$. Są one nazywane ciągami liczb losowych o rozkładzie równomiernym na określonym przedziale. Ich szczególne znaczenie polega między innymi na tym, że przetwarzanie takich liczb pozwala uzyskiwać liczby losowe o innych rozkładach (częstościach) niż równomierne

1. Generacja liczb losowych o rozkładzie równomiernym

Mówiąc o liczbach o rozkładzie równomiernym mamy z reguły na myśli rozkład równomieny na przedziale [0.1], które można oznaczyć symbolem $x_n^{0,1}$. Jeśli pożądane jest generowanie liczb losowych $x_n^{a,b}$ o rozkładzie równomiernym na przedziale [a,b] to liczby takie można otrzymać przekształcając liczby $x_n^{0,1}$ według następującej zależności

$$x_n^{a,b} = a+(b-a)x_n^{0,1} \tag{1}$$

W bibliotekach procedur języków programowania można zawsze znaleźć procedurę generowania liczb losowych o rozkładzie równomiernym na przedziale [0,1]. Znaczenie takich liczb losowych wynika z:

- "losowości" charakteryzującej się równością szans trafiania do dowolnego przedziału $\delta l=[l-\delta,l+\delta]$ o stałej długości $2\delta l$, należącego do przedziału [0,1],
- możliwości przetwarzania tych liczb na inne liczby o "losowości" charakteryzującej się zadanymi, różnymi szansami trafiania do dowolnego przedziału $\delta l=[l-\delta,l+\delta]$ o stałej długości $2\delta l$, należącego do innego przedziału $[l_{min},l_{max}]$.
- łatwość programowej generacji,

Intuicyjnie wyczuwa się, że losowość w sensie wspomnianym w pierwszym punkcie jest losowością najpełniejszą w potocznym znaczeniu tego słowa.

Obecnie stosuje się powszechnie kilka algorytmów generacji liczb losowych o rozkładzie równomiernym na przedziale [0,1], zwanych krótko generatorami liczb losowych, należących do klasy generatorów liniowych. Ogólna postać rekurencyjnej zależności, określającej liczbę losową x_n jako funkcję liczb losowych, które ją poprzedzają w generowanym ciągu liczb losowych jest następująca

$$x_{n+1} = a_0x_n+a_1x_{n-1}+\cdots+a_kx_{n-k} \pmod M \tag{2}$$

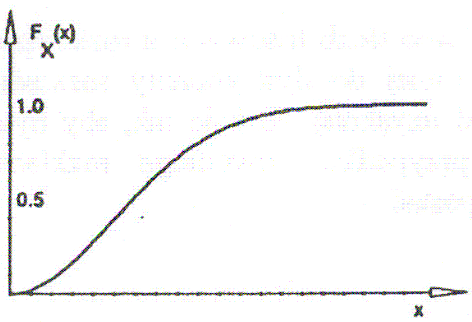
W zależności (2) wszystkie współczynniki a_i oraz x_n są liczbami całkowitymi z przedziału [0,M-1]. Algorytmy te wyparły praktycznie wszystkie inne metody generowania liczb losowych. Właściwości generatorów są oceniane długością okresu, zakładanymi parametrami probabilistycznymi oraz wynikami określonych testów statystycznych.

2. Generacja liczb losowych o rozkładzie dowolnym.

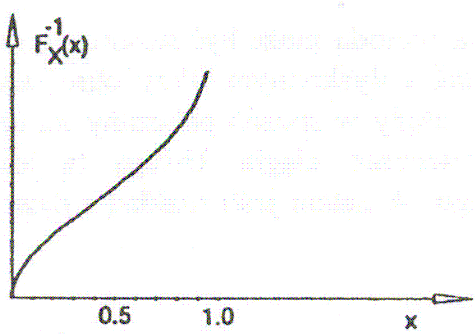
Zdecydowana większość zadań symulacyjnych wymaga operowania ciągami liczb losowych $\{x_n\}$ o rozkładach innych niż równomierny. Z tego względu zagadnienie generowania ciągów takich właśnie liczb jest bardzo ważne. Wszystkie algorytmy generacji liczb losowych o dowolnym rozkładzie opierają się na przetwarzaniu liczb losowych o rozkładzie równomiernym. Milcząco zakłada się zawsze, że odpowiednie ciągi liczb losowych o rozkładzie równomiernym mogą być wytworzone. Będą one w dalszym ciągu oznaczane symbolem r_n. Fakt wykorzystywania ciągów liczb losowych $\{r_n\}$ przy generacji liczb losowych $\{x_n\}$ o dowolnym rozkładzie jest potwierdzeniem istotnego znaczenia, jakie ciągi $\{r_n\}$ odgrywają w symulacjach komputerowych i stanowi uzasadnienie szczególnej dbałości, jaką przywiązuje się do poszukiwania sprawnych algorytmów generacji tych liczb. W dalszym ciągu zostaną omówione najważniejsze ogólne metody generacji liczb losowych o dowolnym rozkładzie $p_X(x)$, kilka metod generacji ciągów liczb losowych o szczególnych rozkładach (w tym gaussowskim) oraz metody generacji oparte na przetwarzania sygnału szumu białego o określonym rozkładzie brzegowym.

2.1. Metoda odwracania dystrybuanty

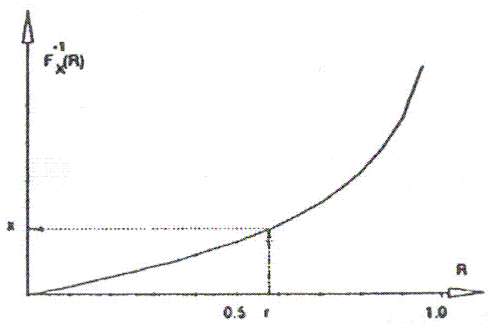
Metoda odwracania dystrybuanty jest stosowana do generacji ciągów liczb losowych o rozkładzie $p_X(x)$, odpowiadającym dystrybuancie $F_X(x)$ (rys.1) w przypadku, gdy jest możliwe określenie funkcji odwrotnej $F_X^{-1}(x)$ (rys.2). Tworzy się zmienną losową **Y** określoną następującą zależnością



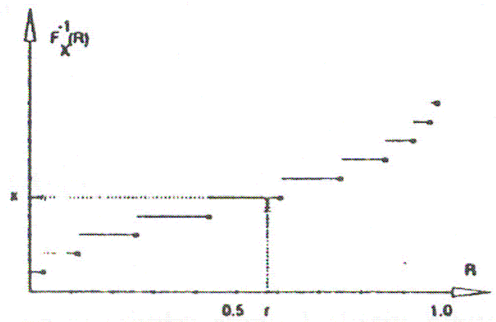
rys.1 Dystrybuanta $F_X(x)$



rys.2 Funkcja $F_X^{-1}(x)$



rys.3 Zasada generacji liczb losowych o rozkładzie ciągłym



rys.4 Zasada generacji liczb losowych o rozkładzie dyskretnym

$$Y = F_X^{-1}(R)$$

w której R jest zmienną losową o rozkładzie równomiernym na przedziale [0,1]. Dystrybuanta zmiennej Y może być wyrażona w następujący sposób

$$F_Y(y) = Pr\{Y \le y\} = Pr\{F_X^{-1}(R) \le y\} = Pr\{R \le F_X(y)\} = Pr\{X \le y\} = F_X(y) \tag{4}$$

A zatem zmienna $Y=F_X^{-1}(R)$ ma rozkład

$$p_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(y) = p_X(y) \tag{5}$$

Omawiana metoda może być stosowana do generacji zarówno liczb losowych o rozkładzie ciągłym jak i dyskretnym. Przy określaniu funkcji odwrotnej do dystrybuanty rozkładu Poissona należy w sposób pokazany na rys.4 zdefiniować uzyskaną funkcję tak, aby była ona lewostronnie ciągła. Uwaga ta jest słuszna w przypadku dowolnego rozkładu dyskretnego. A zatem jeśli rozkład i dystrybuanta mają postać

$$p_X(x) = \sum_{i=0}^{I} b_i \delta(x-a_i) \tag{6}$$

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{I} b_i u(x-a_i) \tag{7}$$

gdzie

$$u(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ 1; & x > 0 \end{cases} \tag{8}$$

a lewostronnie ciągła funkcja odwrotna do dystrybuanty $F_X^{-1}(x)$

$$F_X^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{I} (a_i - a_{i-1}) u(x - b_{i-1}) \tag{9}$$

to algorytm generacji liczb losowych o rozkładzie dyskretnym może mieć następującą postać

- wygenerować liczbę losową r o rozkładzie równomiernym na przedziale [0,1],
- przyjąć $x_n=b_i$ jeśli

$$\sum_{k=0}^{i-1} b_k < r \le \sum_{k=0}^{i} b_k \tag{10}$$

Wyznaczenie funkcji odwrotnej do dystrybuanty $F_X(x)$ nie zawsze jest możliwa. Często są wykorzystywane przybliżone postaci dystrybuanty, które gwarantują uzyskanie funkcji odwrotnej. Istniej zawsze możliwość przybliżonego, numerycznego wyznaczenia funkcji odwrotnej.

2.2. Metoda eliminacji

Metoda eliminacji jest stosowana w przypadku zmiennych przyjmujących wartości ze skończonego przedziału [a,b]. Jej istota polega na generowaniu pomocniczych liczb losowych o znanym, innym niż pożądany, rozkładzie, i akceptowaniu jedynie niektórych z nich (eliminowaniu pozostałych) jako liczb losowych będących obiektem generacji. Generacja pomocniczych liczb losowych powinna oczywiście być prosta gdyż jedynie to może uzasadnić użyteczną wartość metody. Wykorzystuje się w niej znaną relację między prawdopodobieństwami: warunkowym, łącznym i brzegowym

$$p_{X|A}(x|a) = \frac{P(x<X\le x+dx, A)}{P(A)} \tag{11}$$

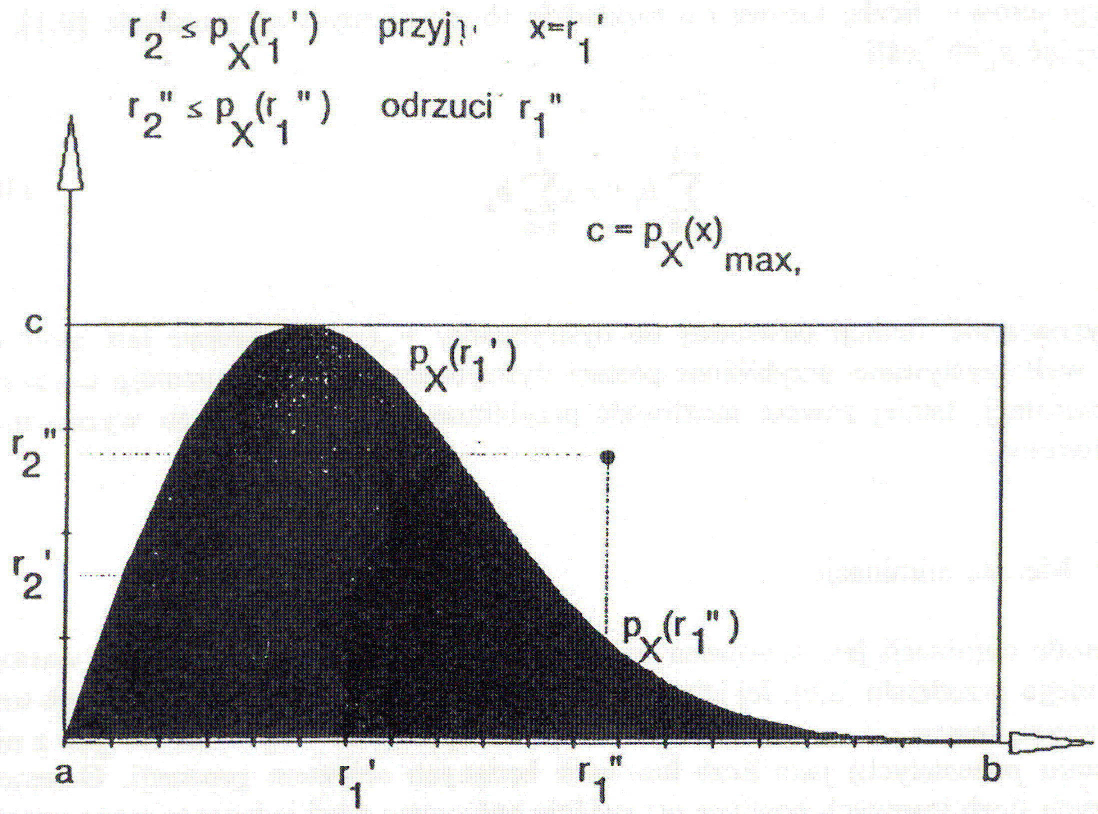
Zdarzenie losowe A jest definiowane za pośrednictwem dwóch niezależnych zmiennych losowych: R_1 o rozkładzie równomiernym na przedziale [a,b] i R_2 o rozkładzie równomiernym na przedziale [0,c]. Stała c jest równa maksymalnej wartości rozkładu $p_X(x)$, charakteryzującego populację, z której mają być generowane liczby losowe. Generowanie liczb losowych x_n polega na:

- wygenerowaniu pary niezależnych liczb losowych r_1 i r_2,
- przyjęciu $x_n= r_1$ jeśli $r_2 \le p_X(r_1)$,
- odrzuceniu obu liczb r_1 i r_2 w przeciwnym przypadku.

Geometryczną interpretację obu sytuacji przedstawiono na rys.6

Możliwe są również pewne modyfikacje algorytmu eliminacji. W wersji przedstawionej powyżej wykorzystuje się parę niezależnych liczb losowych o rozkładach równomiernych i relacje $r_1>p_X(r_2)$ lub $r_1<p_X(r_2)$. Jeśli gęstość prawdopodobieństwa $p_X(x)$ może być przedstawiona w postaci

$$p_X(x) = A p_Y(x) g(x) \tag{12}$$



rys.5 Zasada generacji liczb losowych metodą eliminacji

gdzie A, $p_Y(x)$ i $g(x)$ są odpowiednio stałym współczynnikiem, gęstością prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej Y i funkcją spełniająca warunek $0 \le g(x) \le 1$, to algorytm eliminacji można zmodyfikować do następującej postaci

- wygenerować parę liczb losowych: y o rozkładzie $p_Y(y)$ i r o rozkładzie równomiernym na przedziale $[0,c]$,
- przyjąć $x_n=y$ jeśli $r \le g(y)$
- odrzucić obie liczby y i r w przeciwnym przypadku.

Jest możliwe tworzenie dalszych modyfikacji omawianego algorytmu wykorzystujących różne przedstawienia gęstości rozkładu $p_X(x)$ i zastępowanie zdarzenia A innym równoważnym zdarzeniem losowym. Zdarzenie A jest określane jako zdarzenie polegające na stwierdzeniu prawdziwości relacji $r_2 \le p_X(r_1)$ natomiast nowe zdarzenie losowe jest definiowane odpowiednią relacją między zmienną o rozkładzie równomiernym i pomocniczą zmienną, losową Y.

3. Metody generacji liczb losowych o rozkładzie gaussowskim

W licznych przypadkach generacja liczb losowych oparta na wykorzystywaniu opisanych powyżej metod nie jest możliwa lub nie prowadzi do zadowalających wyników. Obliczenia mogą okazywać się zbyt kłopotliwe lub czasochonne. Jednocześnie między zmiennymi losowymi o różnych rozkładach istnieją zależności funkcyjne pozwalające odnajdować w funkcjach jednych zmiennych losowych inne zmienne losowe o odmiennych właściwościach probabilistycznych. Fakt ten pozwala generować liczby losowe jako rezultat odpowiedniego przetwarzania innych liczb losowych. Takie podejście może prowadzić do definiowania szczególnych algorytmów generacji pewnych liczb losowych, których generacja metodami ogólnymi jest trudna lub niemożliwa. Bardzo często prŻy generacji liczb losowych o szczególnych rozkładach istotne znaczenie odgrywa generacja liczb gaussowskich. Poniżej omówiono kilka wybranych algorytmów generacji takich właśnie liczb.

Pod pojęciem generacji liczb losowych o rozkładzie gaussowski (normalnym) rozumie się z reguły generację liczb o rozkładzie N(0,1)

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \qquad -\infty<x<\infty \tag{13}$$

Liczby $x^{m,\sigma}$ o rozkładzie gaussowskim N(m,σ) można otrzymać przetwarzając liczby $x^{0,1}$ o rozkładzie N(0,1) zgodnie z zależnością

$$x^{m,\sigma} = \sigma x^{0,1} + m \tag{14}$$

Do generacji liczb w przybliżeniu gaussowskich można wykorzystać metodę odwracania dystrybuanty. Funkcja odwrotna do dystrybuanty rozkładu gaussowskiego nie może być przedstawiona w postaci dogodnej do obliczeń. Praktycznie można jedynie posługiwać się pewnymi jej aproksymacjami. Zależności (13),(14) i (15) przedstawiają jedno z możliwych przybliżeń

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \approx \frac{4e^{-\sqrt{\frac{8}{\pi}}x}}{\left(1+e^{-\sqrt{\frac{8}{\pi}}x}\right)^2}; \qquad x>0 \tag{15}$$

$$F_X(x) = \frac{2}{1+e^{-\sqrt{\frac{8}{\pi}}x}} - 1; \qquad x \geq 0 \tag{16}$$

$$F_X^{-1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}\ln\frac{1+x}{1-x}}; \qquad 0<x<1 \tag{17}$$

rozkładu gęstości i dystrybuanty dla dodatnich argumentów oraz jej funkcji odwrotnej.

Wykorzystanie metody odwracania dystrybuanty umożliwia generację liczb losowych o rozkładzie

$$p_X(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}}; \qquad x>0 \tag{18}$$

a mnożenie każdej z nich przez liczbę losową o rozkładzie

$$p_Y(x) = \frac{1}{2}\delta(x+1) + \frac{1}{2}\delta(x-1) \tag{19}$$

daje w rezultacie liczby o rozkładzie normalnym N(0,1). Algorytm generacji ma więc postać:

- wygenerować liczbę losową r o rozkładzie równomiernym na przedziale [0,1],
- wyznaczyć x według wzoru

$$x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{8}\ln\frac{1+r}{1-r}} \tag{20}$$

Podane powyżej funkcje nie są oczywiście jedynymi przybliżeniami. W literaturze poświęconej zagadnieniom probabilistycznym można znaleźć również inne przybliżenia.

Możliwe jest także generowanie liczb losowych o rozkładzie gaussowskim według algorytmu opierającego się na centralnym twierdzeniu granicznym. Mówi ono, że średnia arytmetyczna n niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach (a tym samym identycznych wartościach średnich m i wariancjach σ^2) dąży do zmiennej losowej o rozkładzie gaussowskim $N(m,\sigma^2/n)$. Algorytm generacji przyjmuje zatem postać

- wygenerować n liczb losowych r_i o rozkładzie równomiernym na przedziale [0,1]
- wyznaczyć liczbę x według następującej formuły

$$x = \sqrt{\frac{n}{12}}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i - \frac{1}{2}\right] \tag{21}$$

Najbardziej rozpowszechniona metoda generacji liczb w przybliżeniu gaussowskich polega na wytwarzaniu średnich arytmetycznych 12 liczb losowych o rozkładzie równomiernym na przedziale [0,1]. Współczynnik w wyrażeniu (18) staje się równy 1 a uzyskane liczby losowe mają w przybliżeniu rozkład N(0,1).

Również metoda eliminacji pozwala określić algorytm generacji liczb gaussowskich. Generacja liczb losowych o rozkładzie (16) może być zrealizowana w następujący sposób. Przekształcając (16) otrzymuje się zależność

$$p_X(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}\,e^{-x}\,e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \tag{22}$$

mającą postać jak w równaniu (10). Generacja liczb losowych o rozkładzie gaussowskim może zatem przebiegać według następującego algorytmu:

- wygenerować liczbę losową y o rozkładzie

$$p_Y(y) = e^{-y}; \qquad y>0 \tag{23}$$

- obliczyć

$$g(y) = e^{-\frac{(y-1)^2}{2}} \tag{24}$$

- wygenerować liczbę losową r o rozkładzie równomiernym ma przedziale [0,1],
- przyjąć x=y jeśli r≤g(y),
- odrzucić liczbę y w przeciwnym przypadku.

4. Przetwarzania sygnałów i generacja zależnych liczb losowych

Sekwencyjne stosowanie procedur wykorzystujących omówione powyżej algorytmy generacji prowadzą do uzyskiwania ciągów niezależnych liczb losowych. Generacja ciągów liczb losowych nie ogranicza się jedynie do generacji liczb niezależnych. Istotne znaczenie ma zagadnienie generacji liczb losowych, które są skorelowane. Problem ten jest w ogólnym przypadku trudny i sprowadza się do generacji ciągów liczb o zadanych rozkładach łącznych. Praktycznie z wyjątkiem przypadku liczb o łącznych rozkładach gaussowskich nie jest on rozwiązany. Odpowiadając na zapotrzebowanie praktyki symulacji komputerowych opracowano wiele szczególnych metod symulacji określonych ciągów liczb losowych. Najczęściej uwzględnia się w nich jedynie brzegowe i 2-wymiarowe rozkłady gęstości prawdopodobieństwa, pozwalające definiować ciągi stacjonarne w szerokim sensie. W takich przypadkach operuje się rozkładami brzegowymi i ciągami autokorelacji.

Bardzo często wytwarza się skorelowane ciągi liczb losowych przetwarzając ciągi liczb niezależnych. Takie podejście nasuwa natychmiast porównanie z przetwarzaniem szumu białego w układach przetwarzania sygnałów a w szczególności wszelkiego rodzaju filtracjami liniowymi i nieliniowymi. Jest oczywiste, że filtracje zmieniają widma sygnałów. Projektowanie filtrów zapewniających wprowadzenie żądanych zmian w widmie sygnału wejściowego jest dziedziną dysponującą licznymi, precyzyjnymi metodami, które pozwalają rozwiązać większość możliwych do sformułowania problemów. Jednak zmianom widm a tym samym korelacjom między próbkami sygnału towarzyszą zawsze nieuniknione zmiany ich wartości powodujące zniekształcanie pierwotnych rozkładów prawdopodobieństwa. Jedynym wyjątkiem są sygnały (ciągi liczb losowych) gaussowskie, które poddawane filtracjom liniowym nie zmieniają typu rozkładów a jedynie ich parametry. Określenie zmienionych rozkładów jest trudne a w większości przypadków niewykonalne. Możliwe jest natomiast określenie wartości momentów tych rozkładów na wyjściu układów liniowych. Poniżej zostaną omówione filtracje liniowe, które wraz z sygnałami, które są im poddawane tworzą znane procesy losowe uśredniania ruchomego (MA) i autoregresji (AR, ARMA).

Generacje skorelowanych liczb losowych opierają się na powiązaniu bieżącej liczby losowej x_n z liczbami x_{n-1}, x_{n-2}, ..., które ją poprzedzają. Można to osiągnąć bezpośrednio lub pośrednio, uzależniając liczbę x_n od pomocniczych liczb losowych, wykorzystywanych przy wytwarzaniu liczb x_{n-1}, x_{n-2}, ... W naturalny sposób nasuwa się więc porównanie z przetwarzaniem sygnałów. W takim przypadku sygnałem wejściowym, sygnałem wyjściowym i systemem przetwarzania są odpowiednio ciąg pomocniczych liczb losowych $\{r_n\}$, ciąg generowanych liczb losowych $\{x_n\}$ i algorytm generacji. Liczby losowe w ciągu liczb skorelowanych mogą być wyznaczone przez odpowiednie równania różnicowe.

$$x_n = \alpha_1 x_{n-1} + \alpha_2 x_{n-2} + \ldots + \beta_0 r_n + \beta_1 x_{n-1} + \beta_2 r_{n-2} + \ldots \qquad (25)$$

Powyższe równanie różnicowe opisuje układ liniowy o transmitancji

$$H(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \ldots}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \ldots} \qquad (26)$$

która określa odpowiedź impulsowa $\{h_n\}$ o kształcie zależnym od usytuowania punktów osobliwych funkcji H(z) na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z. Wartości średnie i średniokwadratowe elementów ciągów $\{x_n\}$ i $(r_n\}$ spełniają następujące zależności

$$E[x_n] = E\left[\sum_{-\infty}^{\infty} h_k r_{n-k}\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} h_k E[r_{n-k}] = \bar{r} \sum_{-\infty}^{\infty} h_k = \bar{x} \qquad (27)$$

$$E\left[x_n^2\right] = E\left[\sum_{-\infty}^{\infty} h_k r_{n-k} \sum_{-\infty}^{\infty} h_l r_{n-l}\right]$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} E\left[r_{n-k} r_{n-l}\right] h_k h_l \qquad (28)$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} R_{k-l}^{rr} h_k h_l = \overline{x_n^2}$$

Wariancja ciągu wyjściowego jest więc

$$\sigma_{x_n}^2 = \overline{x_n^2} - \overline{x_n}^2 \qquad (29)$$

Znajomość wartości średniej i wariancji pozwalają na określenie jedynie rozkładu gaussowskiego, który jest rozkładem liczb losowych $\mathbf{x_n}$ w przypadku gdy liczby losowe $\mathbf{r_n}$ są też gaussowskie. Jedynie w takim przypadku liniowe przekształcenie ciągu liczb losowych pozwala określić zarówno rozkład jak i korelacje ciągu liczb przetworzonych x_n.

Powyższe zależności nie określają jednak ciągu autokorelacji. Elementy ciągu autokorelacji można wyznaczyć na podstawie transmitancji H(z). Wiadomo bowiem, że widmo gęstości mocy $G^{xx}(e^{j\omega})$, którego postać jest jednoznacznie określona przez transmitancję H(z) jest transformatą Fouriera ciągu autokorelacji $\{R_k^{xx}\}$

$$G^{xx}(e^{j\omega}) = G^{rr}(e^{j\omega}) H(z) H\left(\frac{1}{z}\right)\Bigg|_{z=e^{j\omega}} \qquad (30)$$

$$R_k^{xx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G^{xx}(e^{j\omega}) e^{jk\omega} d\omega \qquad (31)$$

Ciąg niezależnych liczb losowych $\{r_n\}$ charakteryzuje się stałym widmem gęstości mocy $G^{rr}(e^{j\omega})$. Dlatego algorytm generacji skorelowanych liczb losowych jest wyznaczony przez transmitancję H(z). Ustalenie jej postaci, zapewniającej pożądaną widmową gęstość mocy $G^{xx}(e^{j\omega})$, jest zagadnieniem rozwiązanym w teorii przetwarzania sygnałów.

Wytwarzanie skorelowanych liczb losowych o rozkładach innych niż gaussowskie jest zagadnieniem znacznie bardziej złożonym i w ogólnym przypadku nie rozwiązanym. W przypadku liczb losowych o rozkładach pokrewnych rozkładowi gaussowskiemu jest możliwe przekształcenie skorelowanych liczb gaussowskich w odpowiadające im liczby o innym rozkładzie. Będą one oczywiście również skorelowane lecz charakteryzujący te korelacje ciąg korelacji $\{R_k\}$ będzie miał inną postać niż ciąg korelacji $\{R_k\}^G$

przetwarzanych liczb gaussowskich. Wyznaczenie zależności między $\{R_k\}$ i $\{R_k\}^G$ jest zadaniem złożonym obliczeniowo i podejście to nie jest zbyt często wykorzystywane.

5. Testowanie generatorów liczb losowych

Generator liczb losowych wytwarza ciągi liczb $\{x_n\}$, które chcemy traktować jak realizacje ciągu niezależnych zmiennych losowych $\{X_n\}$ o identycznym rozkładzie prawdopodobieństwa $p_X(x)$. A zatem weryfikacja właściwości generatora sprowadza się do rozstrzygnięcia kwestii, czy ciąg $\{x_n\}$ można traktować jak próbkę prostą z takiej populacji. Weryfikacji takiej można dokonać jedynie na podstawie zaobserwowanego ciągu liczb losowych wykorzystując w tym celu metody wnioskowania statystycznego. Do podstawowych testów statystycznych należą testy zgodności rozkładów i testy niezależności.

Testy zgodności rozkładów mogą wykorzystywać porównywanie estymat parametrów rozkładu z zakładanymi parametrami lub histogramu uzyskanego ciągu $\{x_n\}$ z parametrami lub histogramem wyznaczonym na podstawie gęstości rozkładu. Najbardziej rozpowszechniony jest test zgodności χ^2.

Testy niezależności można podzielić na trzy grupy:

- testy zgodności rozkładów wielowymiarowych,
- testy autokorelacji,
- testy uporządkowania.

Testy zgodności rozkładów wielowymiarowych opierają się na założeniu, że znany rozkład brzegowy wyznacza jednoznacznie k-wymiarowy rozkład niezależnych zmiennych X_i; $i=1,2,...k$. Testy autokorelacji wykorzystują oszacowane na podstawie ciągu $\{x_n\}$ współczynniki korelacji R_k, o których wiadomo, że jeśli $\{X_n\}$ jest próbką prostą, to

$$R_k = E\{X_i X_{i+k}\} \begin{cases} \neq 0; & k=0 \\ = 0; & k \neq 0 \end{cases} \qquad (32)$$

Testy autokorelacji umożliwiają sprawdzanie, czy dla $k \neq 0$ współczynniki korelacji są istotnie różne od 0. Testy uporządkowania polegają na wykrywaniu ewentualnych, niepożądanych tendencji w ciągu $\{x_n\}$.

Przebieg ćwiczenia

1. Uruchomić program **cwicz5.exe**, znajdujący się w katalogu **c:\sislab**, i odpowiadając na pytania stawiane przez program
   - obejrzeć realizacje szumu białego o rozkładzie normalnym, wykładniczym lub binarnym,

- obejrzeć realizacje szumu kolorowego uzyskiwanego w rezultacie filtracji szumu białego,
- porównać rozkłady brzegowe i funkcje autokowariancji.

UWAGA! **$-1.0<\alpha<1.0$**

2. Uruchomić program **cwicz5g.exe**, znajdujący się w katalogu **c:\sislab** a następnie

- dla wybranego dowolnie sygnału zaobserwować wpływ liczby przedziałów wartości symulowanego sygnału na kształt histogramu,
- podjąć próbę określenia kryterium doboru liczby przedziałów gwarantującą właściwe określanie histogramu.

UWAGA! **liczba przedziałów<100**

Dla wybranych wartości parametrów randseed, α i długości sygnału oszacować funkcję autokowariancji i przerysować ją wraz z realizacją sygnału, którą charakteryzuje. Rysunki potraktować jak szkice, pokazujące charakter obu funkcji.

3. Uruchomić program **cwicz5k.exe**, znajdujący się w katalogu **c:\sislab**, i odpowiadając na pytania stawiane przez program

- dla wybranego dowolnie sygnału zaobserwować wpływ długości symulowanego sygnału na jakość szacowania funkcji autokowariancji,
- dla wybranej długości sygnału przeprowadzić obserwacje powtarzalności funkcji autokowariancji dla różnych realizacji symulowanego sygnału,
- zaobserwować wpływ współczynnika α na wymaganą długość symulowanego sygnału, gwarantującą zadowalającą jakość szacowania funkcji autokowariancji.

UWAGA! **max długość sygnału = 4096**

Dla wybranych wartości parametrów randseed, α i długości sygnału oszacować funkcję autokowariancji i przerysować ją wraz z realizacją sygnału, którą charakteryzuje. Rysunki potraktować jak szkice, pokazujące charakter obu funkcji.