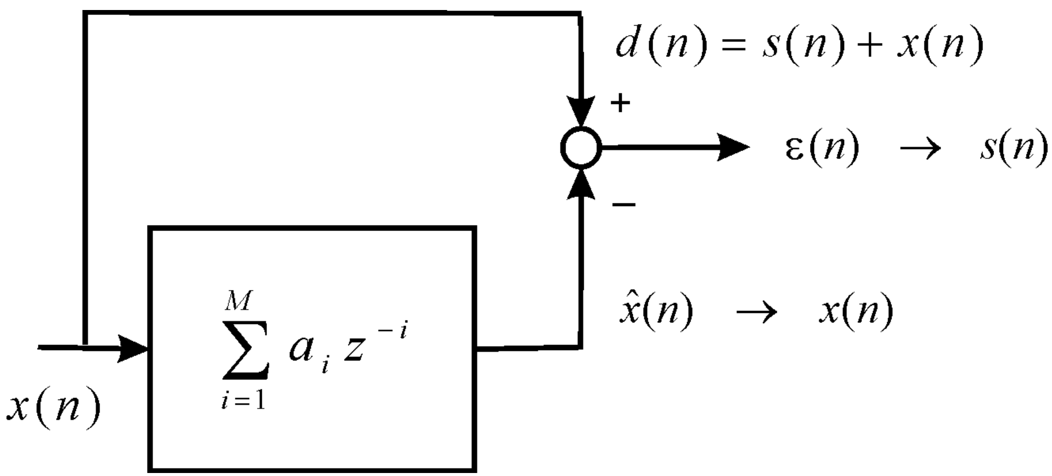
PREDYKCJA
postawienie zagadnienia



$x(n)$ - bieżąca próbka sygnału

$s(n)$ - szum (może być = 0)

$d(n)$-sygnał obserwowany

$\hat{x}(n)$ -predykcja próbki $x(n)$

$\varepsilon(n) = s(n) + x(n) - \hat{x}(n)$ -błąd predykcji

Szukane: $a = [a_1, \ldots, a_M]^T$ - współczynniki predykcji, T - transpozycja

Kryterium: $\min E[\varepsilon^2(n)]$

PREDYKCJA
rozwiązanie

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^{M} a_i \, x(n-i) = a^T \bar{x}(n)$$

$$a = [a_1, \ldots, a_M]^T$$ - wsp. predykcji

$$\bar{x}(n) = \begin{pmatrix} x(n-1) \\ x(n-2) \\ \vdots \\ x(n-M) \end{pmatrix}$$

$$d(n) = x(n)$$

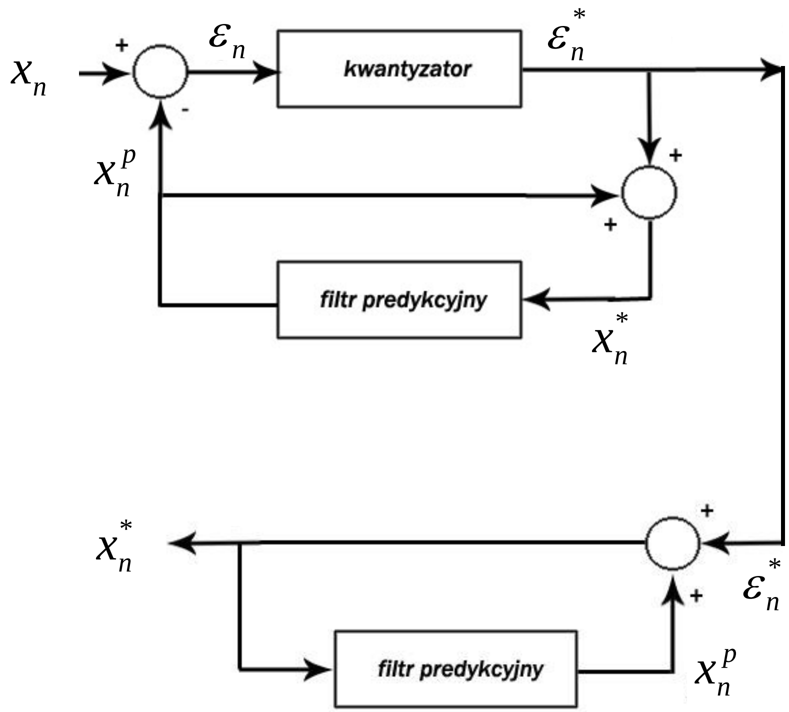
$$\bar{p} = E[d(n)\bar{x}(n)] = E[x(n)\bar{x}(n)] = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_M \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie: $\bar{C}a = \bar{p}$

lub $a(n+1) = a(n) + \Delta a(n) = a(n) + \beta \varepsilon(n) \bar{x}(n)$

ADPCM (adaptive differential pulse code modulation)

Modulator



Demodulator

x_n -sygnał wejściowy

ε_n -sygnał różnicowy (błąd predykcji)

x_n^p -sygnał predykcji

ε_n^* -skwantowany syg. różnicowy

x_n^* -sygnał wyjściowy

$e_n = \varepsilon_n^* - \varepsilon_n$ -błąd kwantyzacji

$$e_n = \varepsilon_n^* - \varepsilon_n = x_n^* - x_n \quad \Rightarrow \quad x_n^* = x_n + e_n$$

ADPCM (adaptive differential pulse code modulation)

$$SNR = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\varepsilon^2}\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_e^2} = G_p SNR_q$$

$$SNR[dB] = G_p[dB] + SNR_q[dB]$$

$$G_p = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\varepsilon^2}$$ -zysk predykcji (zależy od predyktora)

$$SNR_q = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_e^2}$$ -SNR kwantyzatora (w kwantyzatorze adaptacyjnym zależy głównie od liczby poziomów kwantyzacji N)

Przykład: modulacja delta (DM – delta modulation)

-kwantyzator N=2 poziomowy (SNR$_q$ < 6 dB)

-najprostszy predyktor $x_n^p = x_{n-1}^*$

-zwiększenie częstotliwości próbkowania w celu zwiększenia korelacji sąsiednich próbek (dla mowy telefonicznej o pasmie 4 kHz częst. próbkowania >16 kHz)

Obliczenie zysku predykcji: $\varepsilon_n = x_n - x_n^p = x_n - x_{n-1}^* = x_n - x_{n-1} - e_{n-1} \approx x_n - x_{n-1}$

$\sigma_\varepsilon^2 = E\left(\varepsilon_n^2\right)$ E – operator uśredniania, R$_i$ – i-ty współczynnik autokorelacji

$$\sigma_\varepsilon^2 = E\left((x_n - x_{n-1})^2\right) = \underbrace{E\left(x_n^2\right)}_{R_0 = \sigma_x^2} - 2\underbrace{E\left(x_n x_{n-1}\right)}_{R_1} + \underbrace{E\left(x_{n-1}^2\right)}_{R_0 = \sigma_x^2} = 2R_0 - 2R_1$$

$$G_p = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{R_0}{2R_0 - 2R_1} = \frac{1}{2(1 - \frac{R_1}{R_0})}$$

Gdy $\frac{R_1}{R_0} > 0.5$ to $G_p > 1$

Predyktor liniowy 1-go rzędu

$$x_n^p = a_1 \, x_{n-1}^*$$

a_1 – współczynnik predykcji

Obliczenie zysku predykcji: $\varepsilon_n = x_n - x_n^p = x_n - a_1 x_{n-1}^* = x_n - a_1(x_{n-1} + e_{n-1}) \approx x_n - a_1 x_{n-1}$

$$\sigma_\varepsilon^2 = E\left((x_n - a_1 x_{n-1})^2\right) = E\left(x_n^2\right) - 2a_1 E\left(x_n x_{n-1}\right) + (a_1)^2 E\left(x_{n-1}^2\right) = R_0 - 2a_1 R_1 + (a_1)^2 R_0$$

Predyktor optymalny: $\max G_p \Rightarrow \min \sigma_\varepsilon^2$

$$\frac{\partial \sigma_\varepsilon^2}{\partial a_1} = -2R_1 + 2a_1 R_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{R_1}{R_0}$$

Zysk predykcji dla predyktora optymalnego:

$$G_p = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{R_0}{R_0 - 2\frac{R_1}{R_0} R_1 + (\frac{R_1}{R_0})^2 R_0} = \frac{1}{1 - (\frac{R_1}{R_0})^2} \geq 1$$

gdyż $|R_1| \leq R_0$

Predyktor liniowy p-go rzędu

$a_1 \dots a_p$ – współczynniki predykcji, T - transpozycja

$$x_n^p = \sum_{i=1}^{p} a_i\, x_{n-i}^* = \bar{a}^T \bar{X}_n^*$$

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \qquad \bar{X}_n^* = \begin{pmatrix} x_{n-1}^* \\ \vdots \\ x_{n-p}^* \end{pmatrix}$$

Obliczenie zysku predykcji:

$$\varepsilon_n = x_n - x_n^p = x_n - \bar{a}^T \bar{X}_n^* \approx x_n - \bar{a}^T \bar{X}_n$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = E\left((x_n - \bar{a}^T \bar{X}_n)^2\right) = E\left(x_n^2\right) - 2\bar{a}^T E\left(x_n \bar{X}_n\right) + \bar{a}^T E\left(\bar{X}_n \bar{X}_n^T\right)\bar{a} = R_0 - 2\bar{a}^T \bar{p} + \bar{a}^T \bar{C}\bar{a}$$

$$\bar{p} = E\left(x_n \bar{X}_n\right) = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_p \end{pmatrix} \qquad \bar{C} = E\left(\bar{X}_n \bar{X}_n^T\right) = \begin{pmatrix} R_0 & \cdots & R_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{p-1} & \cdots & R_0 \end{pmatrix}$$

$\bar{a}^T \bar{C} \bar{a}$ - forma kwadratowa

Predyktor liniowy p-go rzędu

$$\sigma_\varepsilon^2 = R_0 - 2\overline{a}^T\,\overline{p} + \overline{a}^T\,\overline{C}\,\overline{a}$$

Predyktor optymalny:

$$\frac{\partial \sigma_\varepsilon^2}{\partial \overline{a}} = -2\overline{p} + 2\overline{C}\,\overline{a} = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \overline{C}\,\overline{a} = \overline{p} \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = \overline{C}^{-1}\overline{p}$$

Zysk predykcji dla predyktora optymalnego:

$$G_p = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{R_0}{R_0 - 2\overline{a}^T\,\overline{p} + \overline{a}^T\,\overline{p}} = \frac{R_0}{R_0 - \overline{a}^T\,\overline{p}} = \frac{R_0}{R_0 - \overline{p}^T\,\overline{C}^{-1}\overline{p}} \geq 1$$

Zysk predykcji dla każdego predyktora:

$$G_p = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{R_0}{R_0 - 2\overline{a}^T\,\overline{p} + \overline{a}^T\,\overline{C}\,\overline{a}}$$

Adaptacja predyktora

1. **Blokowa** (stosowana w koderach CELP i wokoderach predykcyjnych)
   - co 10-30 ms oblicza się nowe współczynniki predykcji dla kolejnych głosek

   a) obliczenie współczynników autokorelacji dla 20-30ms ramki sygnału

   $$R_i = \sum_n x_n x_{n+i} \quad i = 0,1,\ldots,p$$

   b) obliczenie współczynników predykcji – rozwiązanie układu równań liniowych

   $$\overline{C}\overline{a} = \overline{p}$$

   c) kwantyzacja współczynników predykcji i przesłanie do odbiornika

Adaptacja predyktora

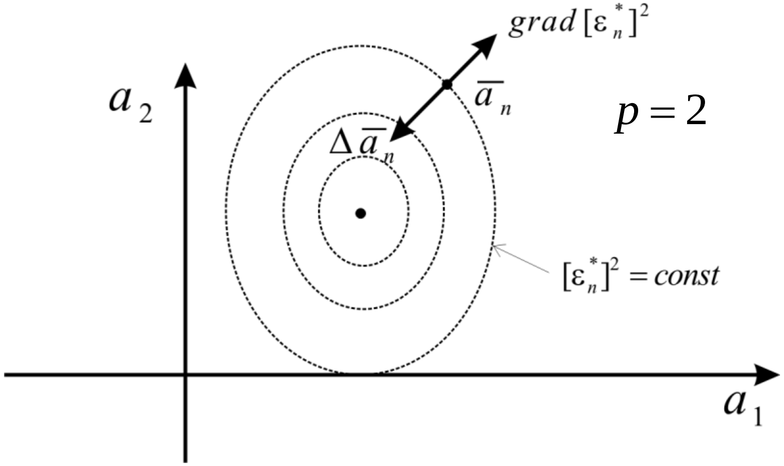
2. **Sekwencyjna** (stosowana w koderach ADPCM)
   - Co próbkę oblicza się nowe współczynniki predykcji, dodając poprawkę do estymaty uzyskanej dla poprzedniej próbki. Przesyła się jedynie skwantowany błąd predykcji – na tej podstawie odtwarza się współczynniki predykcji w odbiorniku

$$\overline{a}_{n+1} = \overline{a}_n + \Delta\overline{a}_n \qquad \Delta\overline{a}_n \text{ - poprawka w chwili n}$$

Poprawki winny powodować zmniejszenie mocy błędu predykcji $[\varepsilon_n^*]^2$

Metoda gradientowa
(SG – stochastycznego gradientu)

$$\Delta\overline{a}_n \propto -grad[\varepsilon_n^*]^2$$



Adaptacja predyktora

$$\varepsilon_n^* = \varepsilon_n + e_n = x_n - x_n^p + e_n =$$

$$= x_n + e_n - x_n^p = x_n^* - x_n^p = x_n^* - \overline{a}_n^T \, \overline{X}_n^*$$

Moc chwilowa błędu predykcji: $[\varepsilon_n^*]^2 = [x_n^* - \overline{a}_n^T \, \overline{X}_n^*]^2$

jest funkcją wektora współczynników predykcji $\overline{a}_n$

Gradient (kierunek wzrostu mocy błedu predykcji):

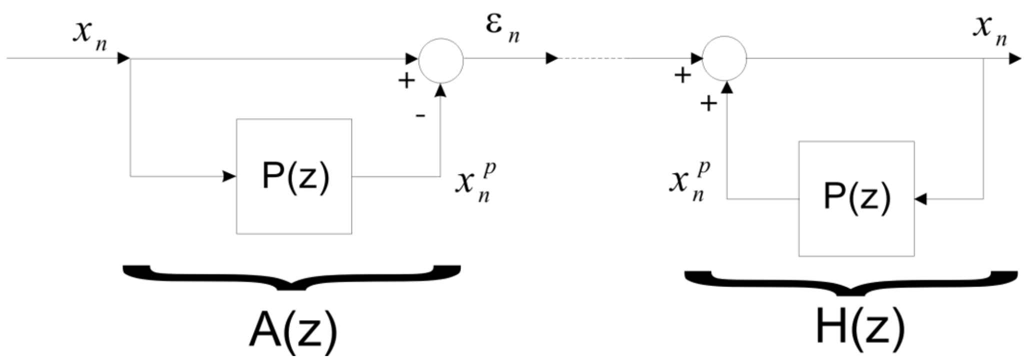
$$grad[\varepsilon_n^*]^2 = \frac{\partial}{\partial \overline{a}_n}[x_n^* - \overline{a}_n^T \, \overline{X}_n^*]^2 = -2\varepsilon_n^* \overline{X}_n^*$$

Poprawka (w kierunku przeciwnym do gradientu): $\Delta \overline{a}_n = -\frac{\beta}{2} grad[\varepsilon_n^*]^2 = \beta \varepsilon_n^* \overline{X}_n^*$

Metoda stochastycznego gradientu: $\overline{a}_{n+1} = \overline{a}_n + \Delta \overline{a}_n = \overline{a}_n + \beta \varepsilon_n^* \overline{X}_n^*$

β – szybkość adaptacji

Interpretacja w dziedzinie częstotliwości
(bez uwzględnienia błędu kwantyzacji)



A(z) – filtr inwersyjny (model nadajnika), H(z) – filtr predykcyjny odbiorczy (syntezy)

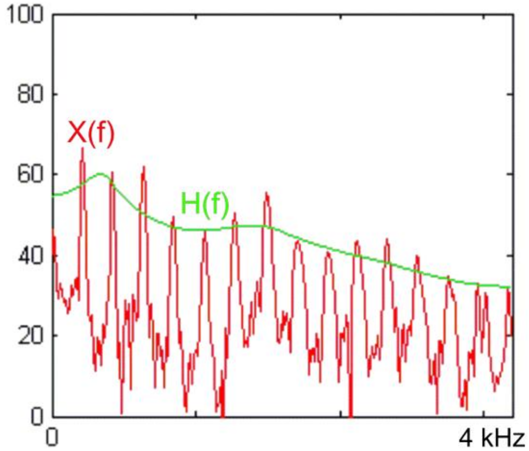
Predyktor: $x_n^p = \sum_{i=1}^{p} a_i x_{n-i}$ $\quad P(z) = \sum_{i=1}^{p} a_i z^{-i}$

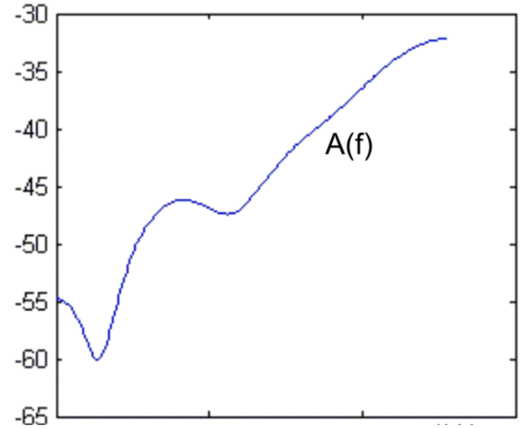
Predykcyjny filtr syntezy: $X(z) = \mathrm{E}(z) + X(z)P(z)$ $\quad X(z)[1 - P(z)] = \mathrm{E}(z)$

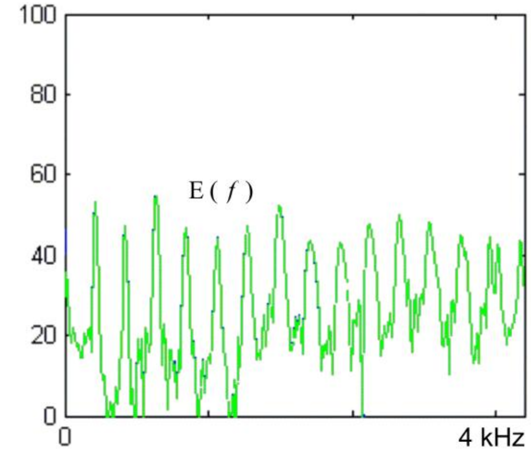
$$H(z) = \frac{X(z)}{E(z)} = \frac{1}{1 - P(z)} = \frac{1}{A(z)}$$

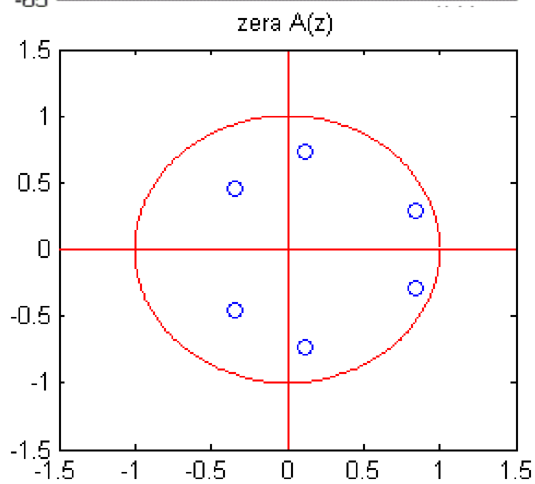
Filtr inwersyjny: $A(z) = 1 - P(z) = 1 - \sum_{i=1}^{p} a_i z^{-i}$

Interpretacja w dziedzinie częstotliwości
(bez uwzględnienia błędu kwantyzacji)









Filtr syntezy H(f):modeluje widmo sygnału