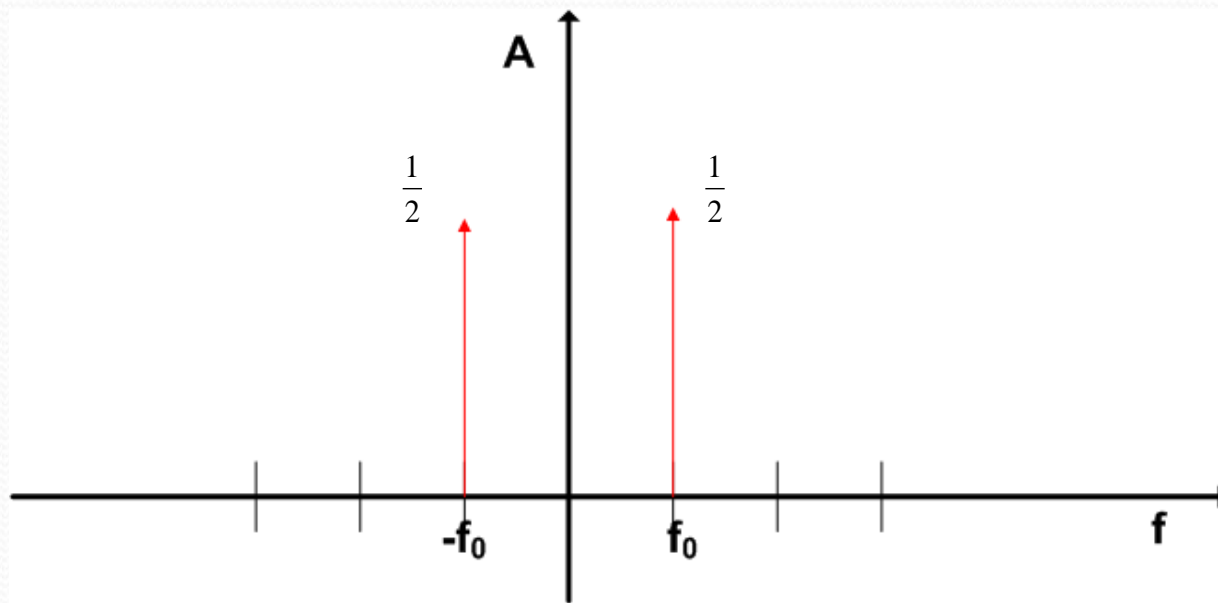


Transformaty

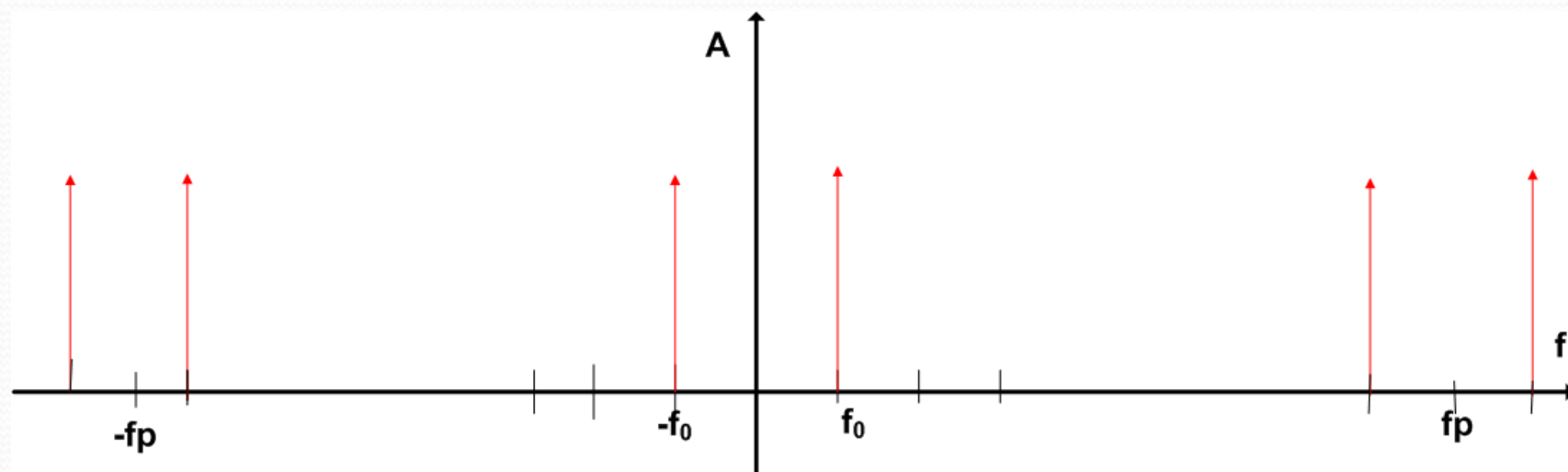
jako analizatory częstotliwości

Widmo fourierowskie:

$$y = \cos(2\pi f_0 t)$$

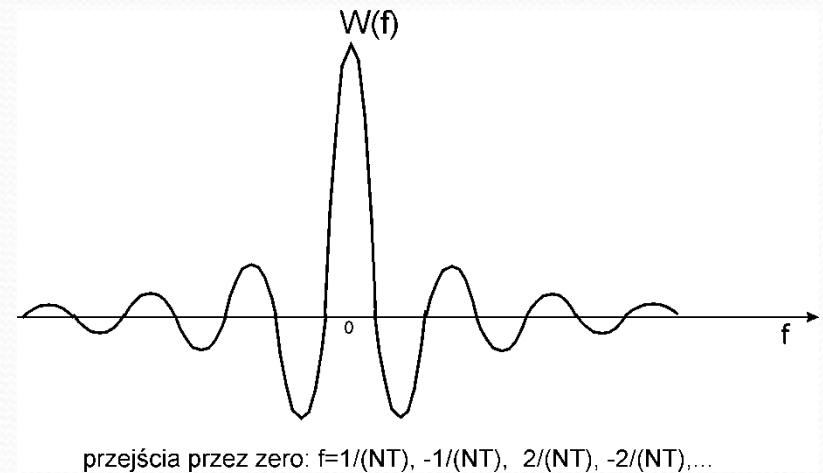
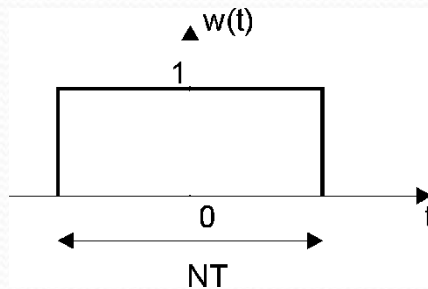


Widmo sygnału próbkowanego

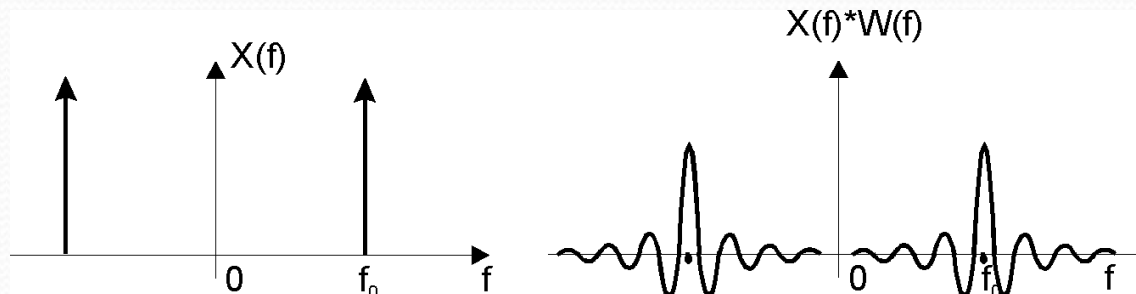


Problem rozdzielczości

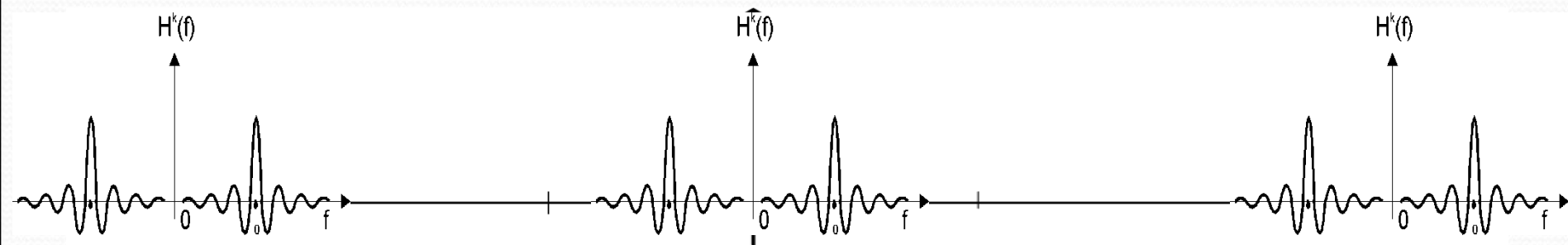
Transformaty cyfrowe: analiza wycinka sygnału $x(t)$ w(t) (N próbek, NT sekund)
Widmo wycinka: $X(f) * W(f)$ (splot)



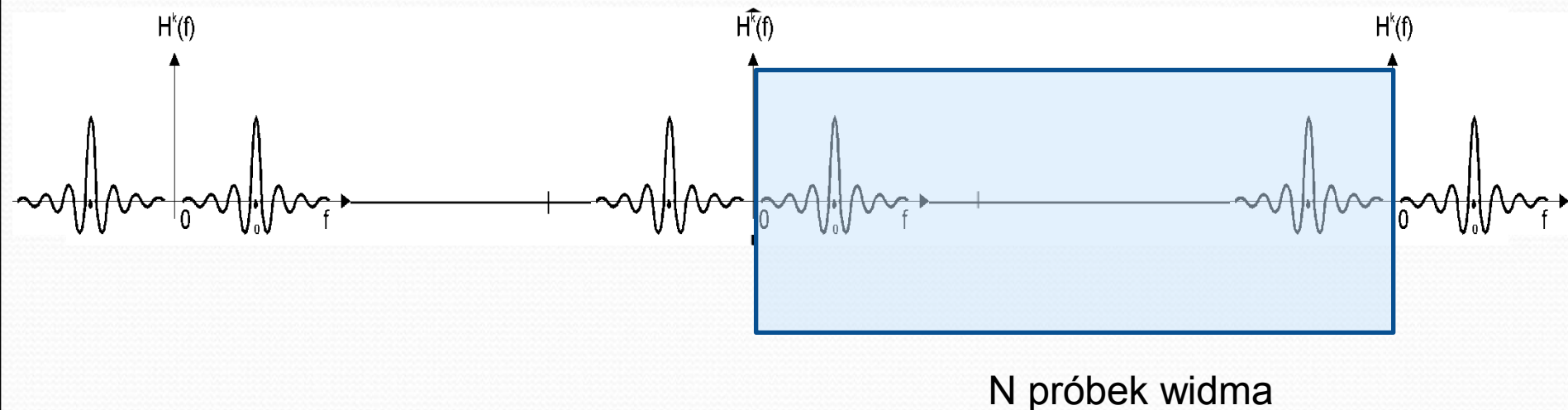
Np. dla $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$



Widmo wycinka (okno prostokątne, N próbek) sygnału spróbkowanego



Transformata DFT



Transformata DFT

$$\bar{X} = \bar{W} \bar{x} = k \rightarrow \bar{W} \quad \bar{x}$$

$$\bar{W} = \{(w_N)^{kn}\}, \quad w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \quad k, n = 0, \dots, N-1$$

- k-ty wiersz $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$, $n = 0, \dots, N-1$ zawiera k okresów

funkcji $\cos(\frac{2\pi}{N}kn) - j \sin(\frac{2\pi}{N}kn)$, co odpowiada

częstotliwości $\frac{k}{NT}$ (T - okres próbkowania)

- DFT daje N próbek widma na częstotliwościach $0, \frac{1}{NT}, \dots, \frac{N-1}{NT}$
($1/T$ - częstotliwość próbkowania)

Transformata DFT

- k-ty wiersz jest sprzężony z (N-k) - tym:

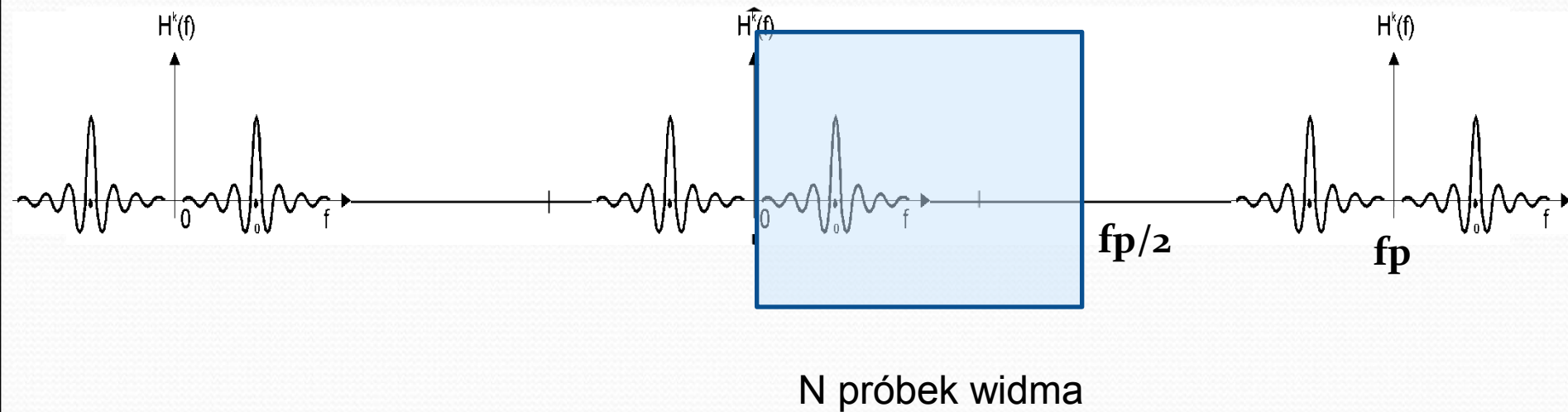
$$e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n} = e^{-j2\pi n} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

=> na częstotliwościach $\frac{k}{NT}$ i $\frac{N-k}{NT}$ otrzymujemy sprzężone wartości widma

Transformata odwrotna (IDFT)

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \bar{W}^t \bar{X} \quad (\text{t oznacza transpozycję i sprzężenie})$$

Transformata DCT



Transformata DCT

$$\bar{X} = \bar{W} \bar{x}$$

DCT jest ortogonalna: $\bar{W}^t \bar{W} = I \rightarrow \bar{W}^{-1} = \bar{W}^t$

IDCT: $\bar{x} = \bar{W}^{-1} \bar{X} = \bar{W}^t \bar{X}$

Porównanie DFT i DCT

DFT:

zespolona

próbkowanie widma od zera do
częstotliwości próbkowania

widmo amplitudy nie zależy od
fazy sygnału wejściowego

DCT:

rzeczywista

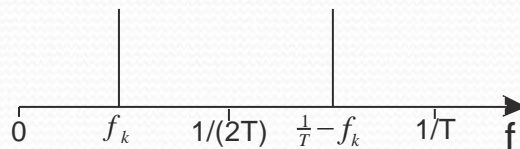
próbkowanie widma od zera do
do połowy częst. próbkowania

widmo amplitudy zależy od
fazy sygnału

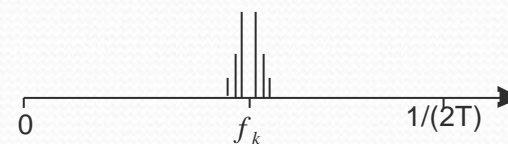
Przykład: analiza N próbek sygnału **sinusoidalnego**

o częstotliwości $f_k = \frac{k}{NT}$ (T - okres próbkowania)

|DFT|



|DCT|



Transformata jako zestaw filtrów

$$\overline{X} = \overline{W} \overline{x}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline X_0 \\ \hline X_1 \\ \hline \vdots \\ \hline X_{N-1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cccc|} \hline h_{N-1}^0 & h_{N-2}^0 & \cdots & h_0^0 \\ \hline h_{N-1}^1 & h_{N-2}^1 & \cdots & h_0^1 \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline h_{N-1}^{(N-1)} & h_{N-2}^{(N-1)} & \cdots & h_0^{(N-1)} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline x_0 \\ \hline x_1 \\ \hline \vdots \\ \hline x_{N-1} \\ \hline \end{array}$$

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i h_{N-1-i}^k = x_{N-1} * h_{N-1}^k \quad \text{czyli wyjście filtru o odpowiedzi impulsowej}$$

$h_0^k, h_1^k, h_2^k, \dots, h_{N-1}^k$ w chwili N-1

Transformata jako zestaw filtrów

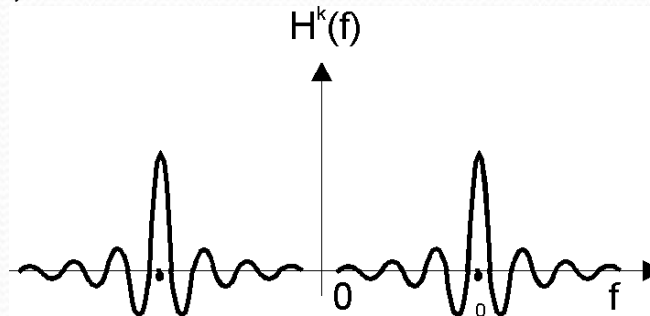
$$\bar{X} = \bar{W} \bar{x}$$

W każdym wierszu macierzy zapisana jest odpowiedź impulsowa pewnego filtru o transmitancji $H^k(z)$

$$H^k(z) = Z(\{h_n^k\}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n^k z^{-n}$$

w dziedzinie częstotliwości: $z = e^{j2\pi fT}$

Np. dla DFT, DCT, odpowiedzi impulsowe są N =próbkowymi wycinkami funkcji sin, cos, wówczas:



Transformaty "z nakładaniem"

Macierz transformaty jest prostokątna

$$\overline{W} = [W_0, W_1, \dots, W_{l-1}]$$

W_i - macierz kwadratowa NxN

$l=2$: MLT (modulated lapped transform)

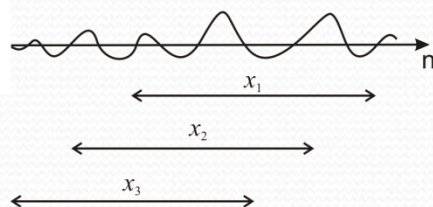
$l=4$: ELT (extended lapped transform)

Gdy W_i jest macierzą DCT, transformaty te nazywane są również MDCT (zmodyfikowane dyskretne transformaty sinusoidalne)

Na każde N próbek sygnału wejściowego mamy N próbek transformaty, gdyż okna nakładają się:

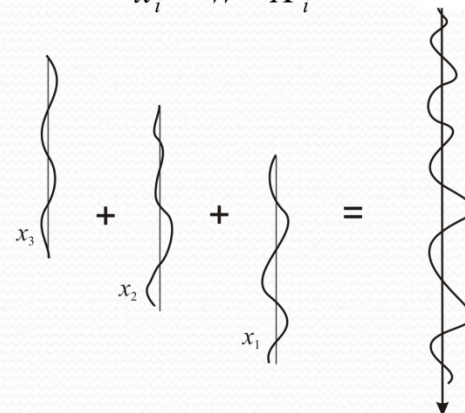
Transformacja prosta

$$X_i = \overline{W} x_i$$



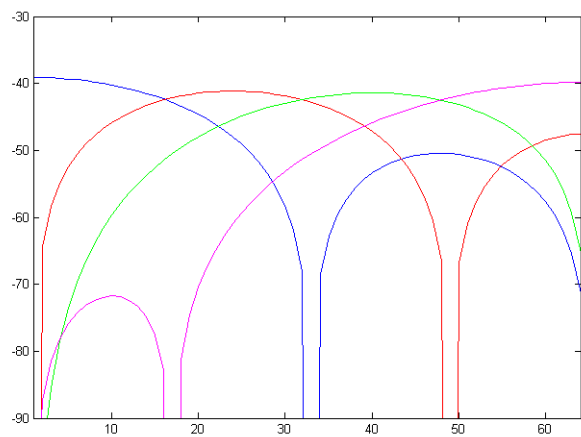
Transformacja odwrotna

$$x_i = \overline{W}^t X_i$$

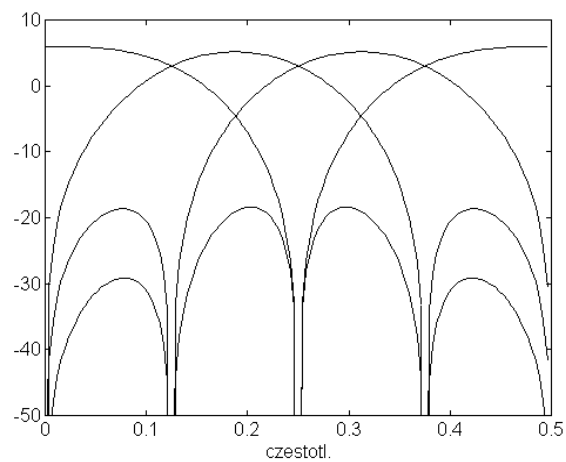


Transformaty “z nakładaniem”

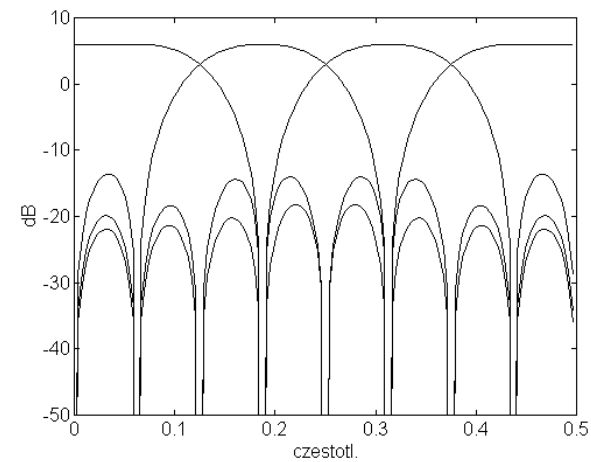
Transmitancje filtrów (podział pasma na 4 podpasma)



DCT



MLT

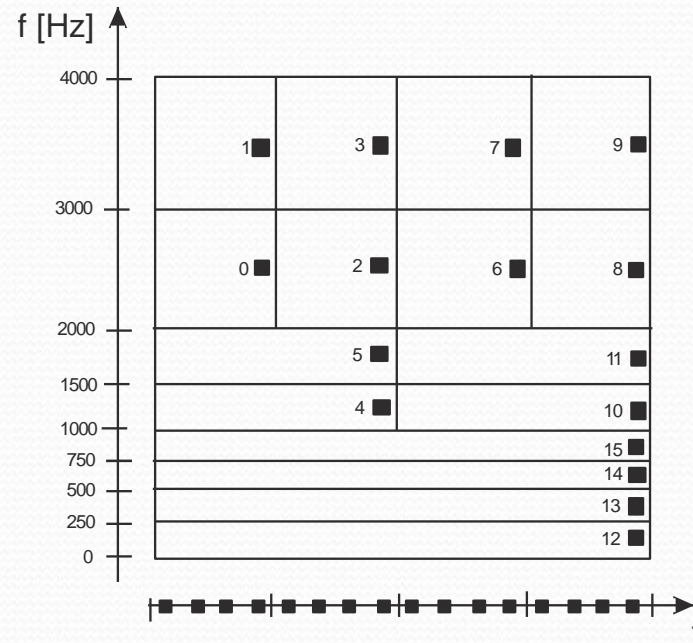
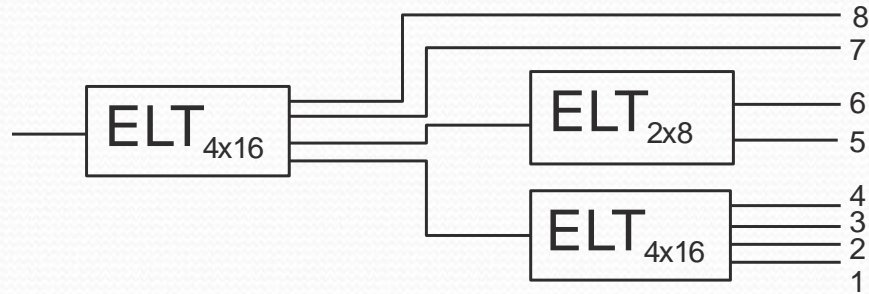


ELT

Zastosowanie m.in. w koderach MP3, ATRAC, G.722.1

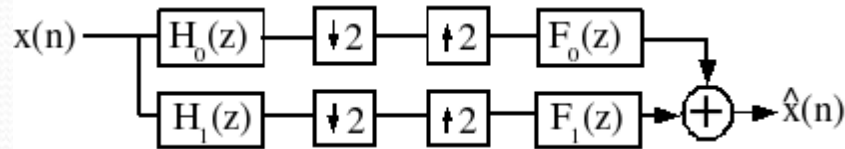
Transformaty "z nakładaniem"

Hierarchiczne struktury filtrów



Quadratic mirror filters

wg Douglasa L. Jonesa



downsampling i upsampling: przed: $Y(z)$, po: $Y(z)+Y(-z)$

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= [X(z)H_0(z) + X(-z)H_0(-z)]F_0(z) + \\ &+ [X(z)H_1(z) + X(-z)H_1(-z)]F_1(z) = \\ &= X(z)[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)] + \\ &+ X(-z)[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)]\end{aligned}$$

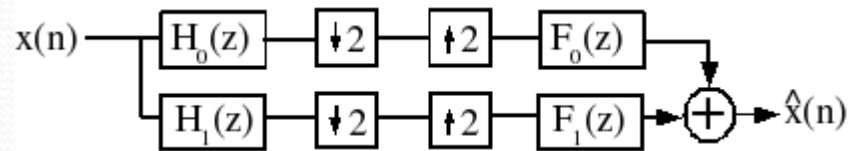
Wytlumienie aliasu gdy np. $F_0(z) = H_1(-z)$

$$F_1(z) = -H_0(-z)$$

Wówczas

$$\begin{aligned}T(z) &= \hat{X}(z) / X(z) = H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z) = \\ &= H_0(z)H_1(-z) - H_1(z)H_0(-z)\end{aligned}$$

Quadratic mirror filters (QMF)



Warunek liniowej fazy: $T(z) = b z^{-D}$

Przykładowe rozwiązanie:

$$H_1(z) = -[z^{-2D+1} H_0(-\frac{1}{z})]$$

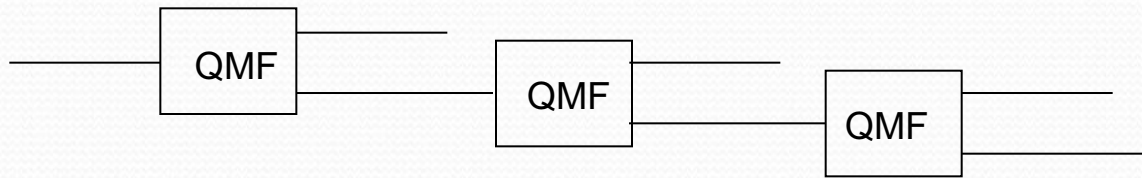
$$\begin{aligned} T(z) &= -H_0(z)[(-z)^{-2D+1} H_0(\frac{1}{z})] + [z^{-2D+1} H_0(-\frac{1}{z})]H_0(-z) = \\ &= +z^{-2D+1} [H_0(z)H_0(\frac{1}{z}) + H_0(-\frac{1}{z})H_0(-z)] \end{aligned}$$

$$z = e^{j2\pi fT} \quad (T - \text{okres próbkowania})$$

$$H_0(z)H_0(\frac{1}{z}) + H_0(-\frac{1}{z})H_0(-z) \Rightarrow |H_0(f)|^2 + |H_0(\frac{1}{2T} - f)|^2$$

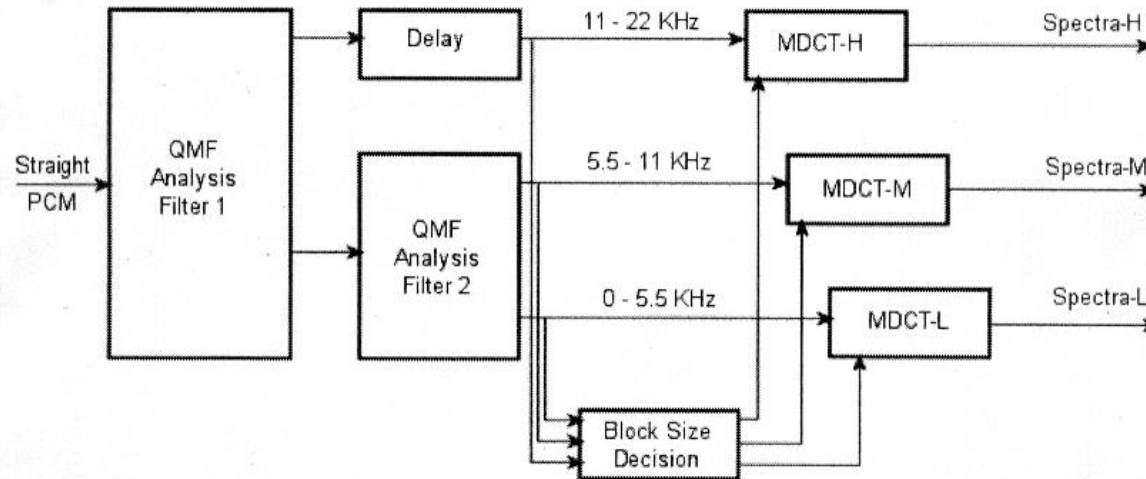
$$\text{Jeśli } H_0(f) = \text{QMF, to } |H_0(f)|^2 + |H_0(\frac{1}{2T} - f)|^2 = \text{const}$$

Quadratic mirror filters (QMF)



Hierarchiczny bank filtrów na bazie QMF

Przykład: koder ATRAC



MDCT – zmodyfikowana dyskretna transformata cosinusoidalna

Wielkość transformowanego bloku próbek wynosi:

11.6 ms (long mode)

1.45 ms (dla pasma 11-22 kHz) i 2.9 ms w pozostałych 2 podpasmach (short mode)