Tomasz Czarnecki, Warszawa, 2017

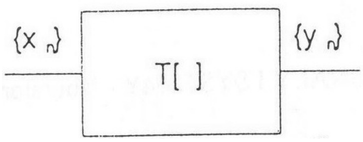
LABORATORIUM CYFROWE PRZETWARZANIE STGNAŁÓW

Tytuł: Właściwości liniowych filtrów cyfrowych

Dyskretne systemy liniowe, niezmienne względem przesunięcia

Wśród systemów przetwarzania sygnałów ważną rolę odgrywają systemy liniowe, niezmienne względem przesunięcia. Decyduje o tym ich względna prostota oraz fakt, że okazują się często dogodnym modelem, opisującym użyteczne praktycznie przetworzenia sygnałów. Ćwiczenie jest poświęcone przedstawieniu właściwości oraz metod opisu dyskretnych systemów liniowych (filtrów) niezmiennych względem przesunięcia.

Dyskretny system przetwarzania, który będziemy nazywać krótko systemem przetwarzania, jest przekształceniem T[.], jakiemu poddaje się dyskretny sygnał wejściowy $\{x_n\}$, zwany sygnałem przetwarzanym, prowadzące do wytworzenia sygnału wyjściowego $\{y_n\}$, nazywany sygnałem przetworzonym.



Rys.1. Przekształcenie odwzorowujące ciąg wejściowy $\{x_n\}$ w ciąg wyjściowy $\{y_n\}$

$$\{y_n\} = T[\{x_n\}] \qquad 1$$

Załóżmy, że system przetwarzania T{.}, pobudzany na wejściu sygnałem $\{x_n^1\}$ lub $\{x_n^2\}$, wytwarza na swym wyjściu odpowiednio sygnały $\{y_n^1\}$ lub $\{y_n^2\}$.

$$\begin{aligned} \{y_n^1\} &= T[\{x_n^1\}] \\ \{y_n^2\} &= T[\{x_n^2\}] \end{aligned} \qquad 2$$

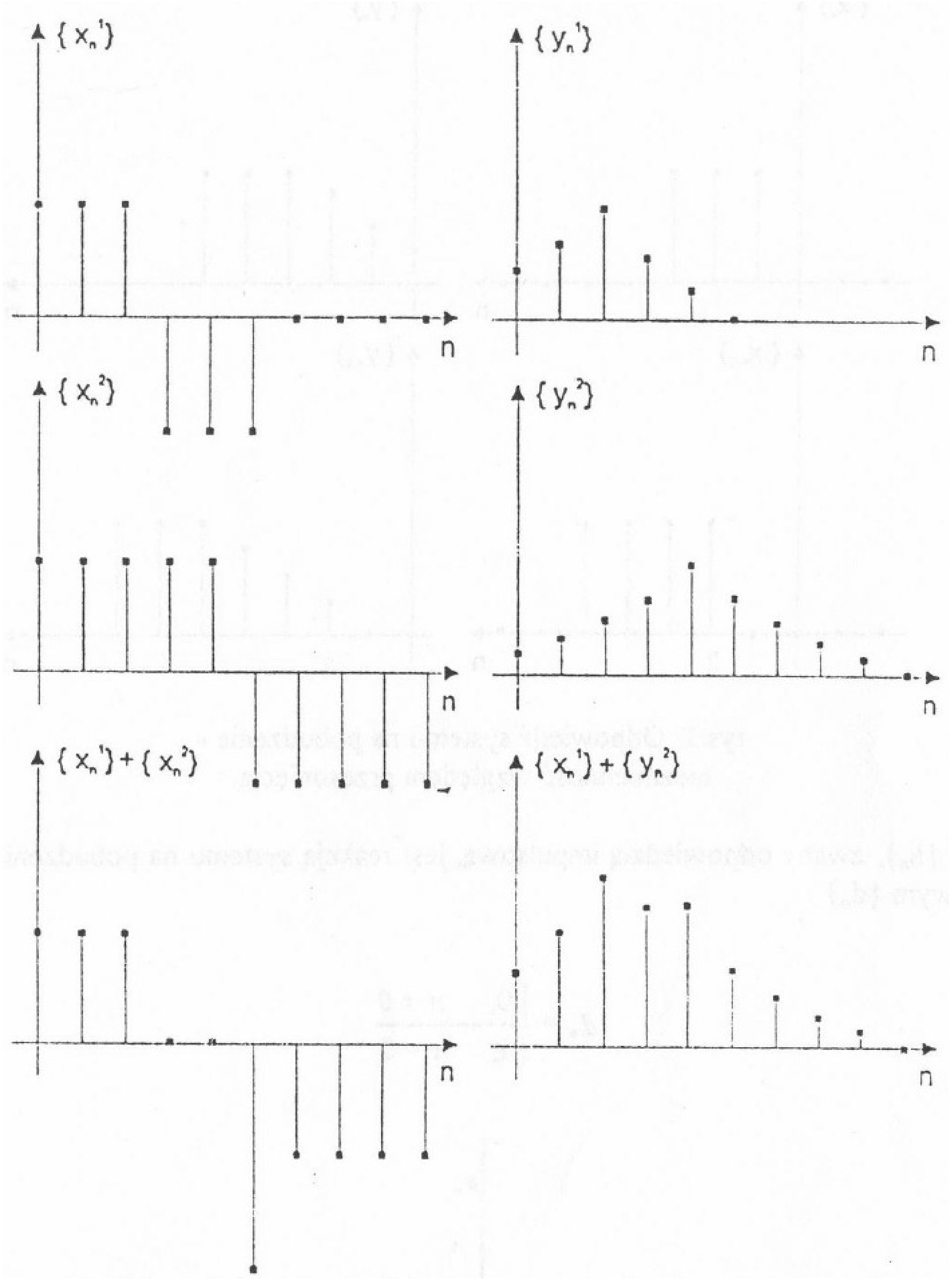
Definicja 1

System przetwarzania jest nazywany systemem liniowym jeśli pobudzony sygnałem $a\{x_n^1\}+ b\{x_n^2\}$ wytwarza na wyjściu sygnał $a\{y_n^1\}+ b\{y_n^2\}$ (Rys.2).

Dyskretny system liniowy może być opisany liniowym równaniem różnicowym o stałych współczynnikach, wiążącym ze sobą ciągi sygnału wejściowego $\{x_n\}$ i wyjściowego$\{y_n\}$.

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} a_k x_{n-k} + \sum_{k=1}^{N} b_k y_{n-k} \quad 3$$

Wśród klasy systemów linowych wyróżnia się systemy niezmienne względem przesunięcia. W przypadku, gdy wskaźnik n identyfikuje się z czasem, systemy te charakteryzują się niezmiennością właściwości w czasie



Rys. 2. Odpowiedź systemu liniowego na pobudzenie - superpozycja.

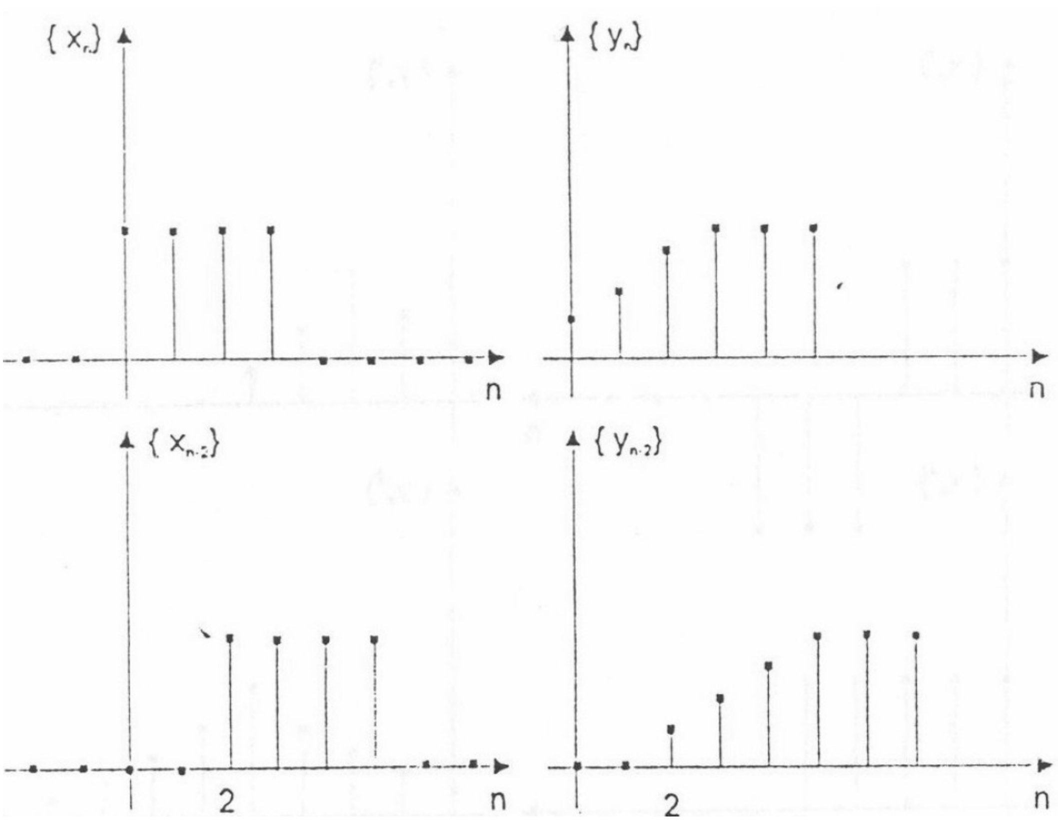
Definicja 2

System reagujący sygnałem $\{y_n\}$ na pobudzenie $\{x_n\}$ jest niezmienny względem przesunięcia jeśli, pobudzony sygnałem $\{x_{n-n0}\}$, wytwarza na wyjściu sygnał $\{y_{n-n0}\}$ (Rys.3).

W systemach liniowych i niezmiennych względem przesunięcia związek między sygnałem wejściowym $\{x_n\}$ i wyjściowym $\{y_n\}$ przyjmuje następującą postać

$$\{y_n\} = \{x_n\}*\{h_n\}$$

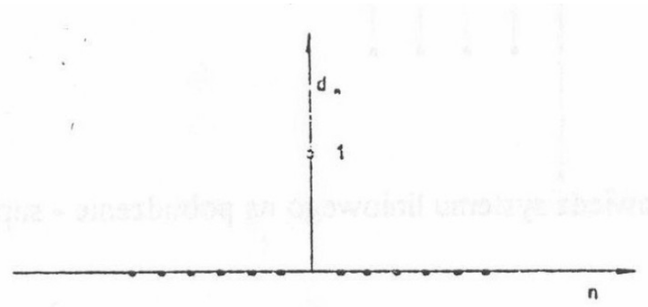
$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} \qquad 4$$



Rys. 3. Odpowiedź systemu na pobudzenie - niezmienność względem przesunięcia.

gdzie ciąg $\{h_n\}$, zwany odpowiedzią impulsową, jest reakcją systemu na pobudzenie sygnałem jednostkowym $\{d_n\}$

$$d_n = \begin{cases} 0; & n \neq 0 \\ 1; & n = 0 \end{cases} \qquad 5$$



Rys. 4. Sygnał jednostkowy

System przetwarzania jest systemem przyczynowym jeśli jego odpowiedź impulsowa jest ciągiem przyczynowym, a więc jeśli $h_n = 0$ dla $n < 0$. System przetwarzania jest stabilny jeśli sygnał wejściowy $\{x_n\}$ o ograniczonym co wartości bezwzględnej elementach wywołuje powstanie na jego wyjściu sygnału wyjściowego $\{y_n\}$, którego elementy mają również ograniczone wartości bezwzględne

$$|x_n| < M \qquad |y_n| < N \qquad 6$$

Aby system liniowy był stabilny w tym sensie jego odpowiedź impulsowa powinna być bezwzględnie sumowalna

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_n| < S \qquad 7$$

Przekształcenie Fouriera pozwala przyporządkować funkcjom czasu, spełniającym określone warunki, odpowiednie funkcje zmiennej ω, zwane transformatami Fouriera. W przypadku ciągu $\{f_n\}$ przekształcenie Fouriera przyporządkowuje mu funkcję $F(e^{j\omega})$ w postaci:

$$F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{j\omega n} \qquad 8$$

Biorąc to pod uwagę, można przyjąć zależności (4) równoważny związek

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega}) \qquad 9$$

gdzie

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j\omega n}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{j\omega n} \qquad 10$$

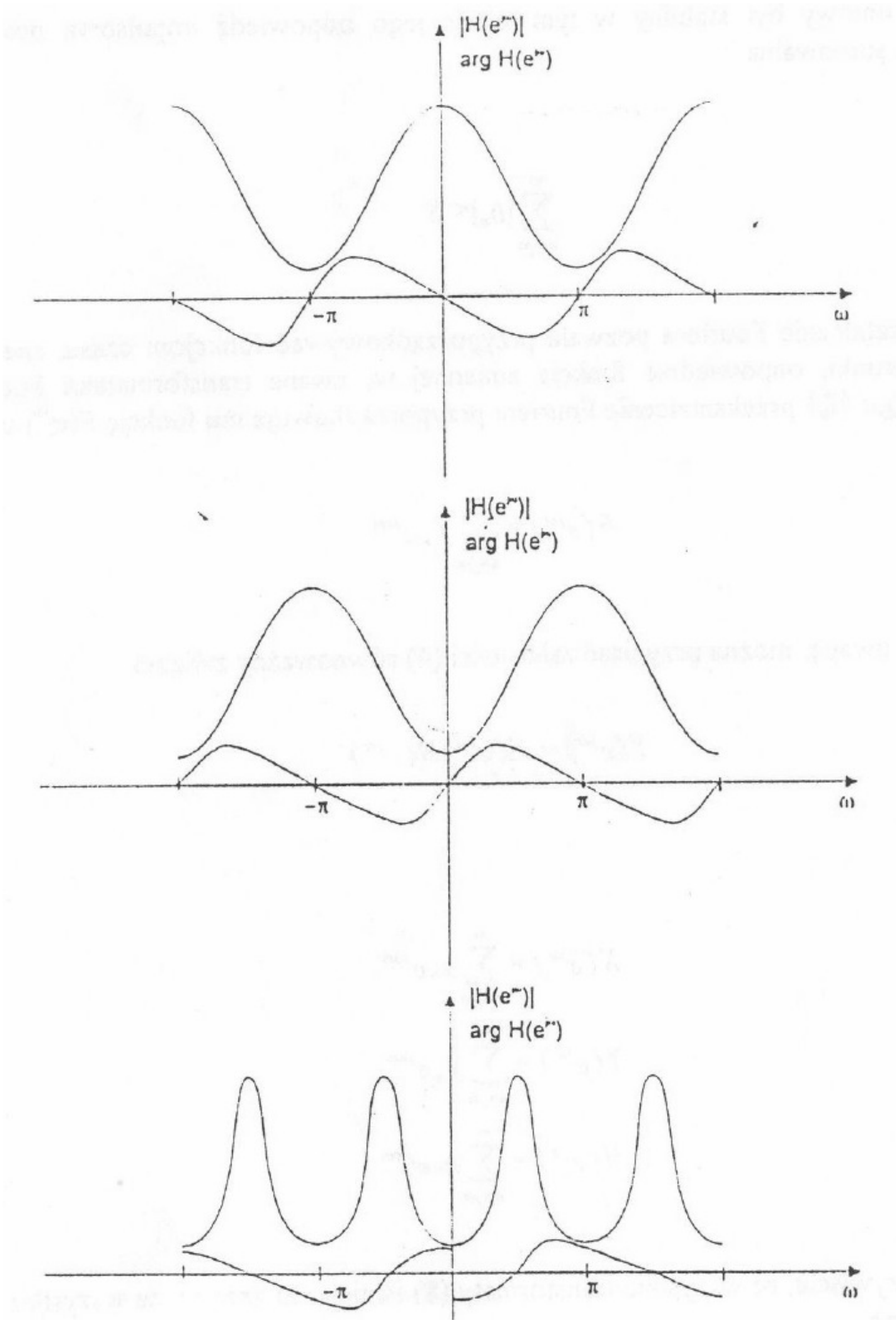
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{j\omega n}$$

Zakłada się oczywiście, że wszystkie transformaty (8) istnieją , że wszystkie sumy w (8) są skończone.

Nasuwa się zatem oczywisty wniosek, że właściwości systemów liniowych i niezmiennych względem przesunięcia mogą być opisywane za pomocą ich odpowiedzi impulsowych $\{h_n\}$ lub jednoznacznie przyporządkowywanych im transformat $H(e^{j\omega})$, nazywanych transmitancjami systemu. Transmitancja systemu jest funkcją przyjmującą wartości zespolone i jest z reguły przedstawiana za pomocą dwóch równoważnych jej funkcji $A(e^{j\omega})$ i $F(e^{j\omega})$ o wartościach rzeczywistych

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\Phi(e^{j\omega})} \qquad 11$$

Funkcje $A(e^{j\omega})$ i $F(e^{j\omega})$ są nazywane odpowiednio charakterystyką amplitudową i fazową systemu.



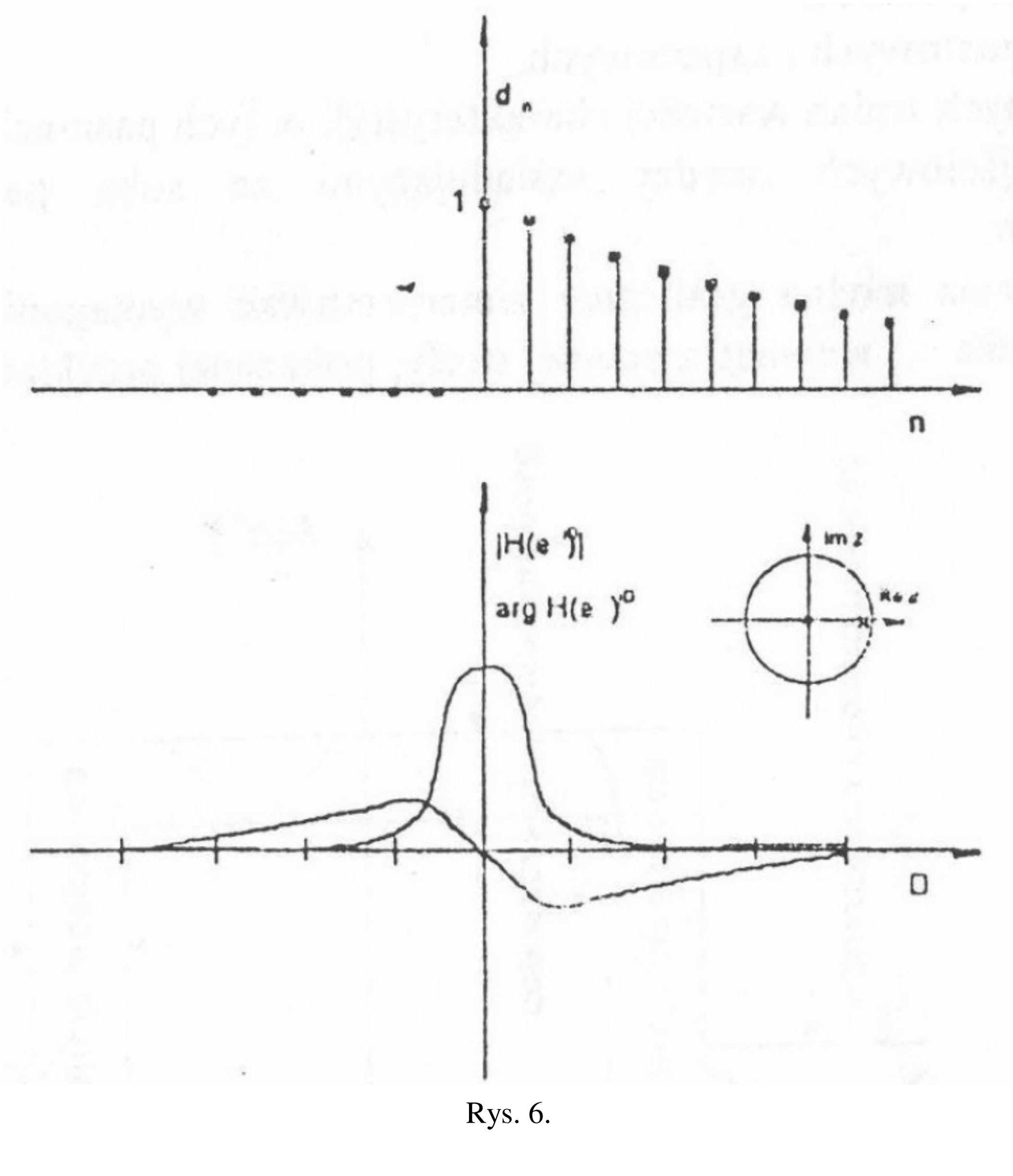
Rys. 5. Przykładowe charakterystyki częstotliwościowe (okresowe) systemu dolnoprzepustowego, pasmowego i górnoprzepustowego.

Transmitancja, jako funkcja okresowej funkcji $e^{j\omega}$, jest okresową funkcją pulsacji kołowej ω z okresem 2π. W konsekwencji, również charakterystyki częstotliwościowe $A(e^{j\omega})$ i $F(e^{j\omega})$ są okresowe. Pojęcie dolnoprzepustowości, górnoprzepustowości i pasmowości systemów wiąże się z pokazanymi na rysunku 5 charakterystykami częstotliwościowymi.

W przypadku systemów liniowych i niezmiennych względem przesunięcia transmitancja (9) przyjmuje postać funkcji wymiernej

$$H(e^{j\omega}) = \frac{(\omega-\omega_1^z)(\omega-\omega_2^z)....(\omega-\omega_M^z)}{(\omega-\omega_1^b)(\omega-\omega_2^b)....(\omega-\omega_N^b)} = \frac{\prod_{i=1}^{M}\omega-\omega_i^z}{\prod_{i=1}^{N}\omega-\omega_i^b} \qquad 12$$

Rozmieszczenie punktów osobliwych (zer ω_i^z i biegunów ω_i^b) transmitancji (10) na płaszczyźnie z pozwala z dokładnością do samego współczynnika określić jej postać. Jeśli odpowiedź impulsowa systemu $\{h_n\}$ jest ciągiem przyczynowym, a system jest stabilny, to wszystkie punkty osobliwe znajdują się wewnątrz okręgu jednostkowego |z|=1.

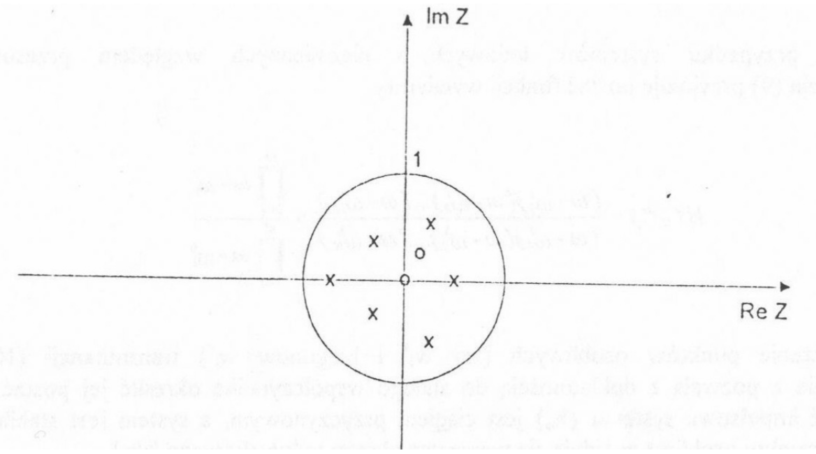


Rys. 6.

Odpowiedź impulsowa systemu jest rzeczywista jedynie w przypadku, gdy bieguny jego transmitancji $H(e^{j\omega})$ znajduje się na osi rzeczywistej lub są parami sprzężone. Wtym przypadku zachodzą zawsze następujące związki

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= H^{*}(e^{-j\omega}) \\
A(e^{j\omega}) &= A(e^{-j\omega}) \\
\Phi(e^{j\omega}) &= -\Phi(e^{-j\omega})
\end{aligned}
\qquad 13
$$

Projektowanie systemów liniowych (w szczególności filtrów liniowych) polega w ogólnym przypadku na pożądanym ukształtowaniu jego charakterystyk częstotliwościowych.

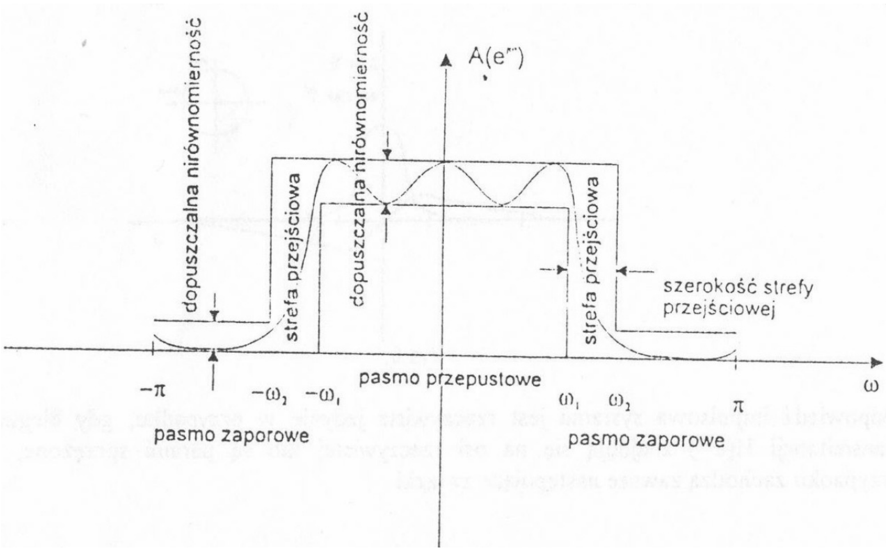


Rys. 7. Płaszczyzna z, koło jednostkowe, bieguny sprzężone i rzeczywiste (x), zera (o)

Są one określane za pomocą:

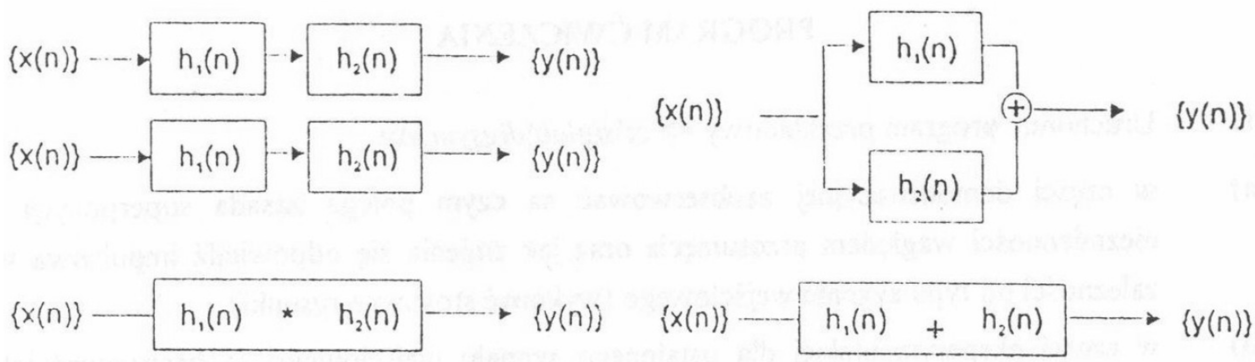
- pasm przepustowych i zaporowych
- dopuszczalnych zmian wartości charakterystyk w tych pasmach
- stref przejściowych między sąsiadującymi ze sobą pasmem przepustowym i zaporowym

Proces projektowania można graficznie zinterpretować wymaganiem, aby charakterystyka amplitudowa mieściła się wewnątrz pewnej strefy, pokazanej przykładowa na rysunku 8.



Rys. 8. Proces projektowania filtru

Kształtowanie to może być realizowane przez określenie liczby punktów osobliwych transmitancji oraz ich rozmieszczenia na płaszczyźnie z. Bardzo często projektowanie systemów przetwarzania można sprowadzić do projektowania dwóch lub więcej prostych systemów, które współdzieląc ze sobą, jaką wypełniać ma system projektowany.



Rys.9. Układ o takich samych odpowiedziach

Ideę przedstawioną na rysunku 9 można wykorzystać przekształcając transmitancję $H(e^{j\omega})$ do postaci sumacyjnej lub iloczynowej, wyrażonej przez sumy lub iloczyny prostych składników lub czynników.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_i H_i\left(e^{j\omega}\right)$$

$$H(e^{j\omega}) = \prod_i (H_i(e^{j\omega}) \qquad 14$$

Funkcje wymierne, których postać przyjmują transmitancję systemów liniowych niezmiennych względem przesunięcia; mogą być, po nieznacznych modyfikacjach, traktowane jak transmitancje iloczynowe a po rozłożeniu na ułamki proste jak transmitancje sumacyjne. Podejście to jest wykorzystywane przy poszukiwaniu tak zwanych kanonicznych postaci transmitancji.

Celem ćwiczenia jest badanie związków zachodzących między postaciami odpowiedzi impulsowej i transmisji systemu liniowego niezmiennego względem przesunięcia i badanie ich wpływu na właściwości systemu.

Wykorzystując środowisko Matlab:

1. Dla ustalonego sygnału wejściowego, w zależności od położenia biegunów na płaszczyźnie Z, jak zmienia się odpowiedź impulsowa.

Rozpatrzyć przypadki:

- **a.** bieguny położone na osi rzeczywistej,
- **b.** bieguny sprzężone,
- **c.** bieguny położone na kole jednostkowym,
- **d.** bieguny położone bliżej lub dalej od środka układu współrzędnych,
- **e.** bieguny położone poza kołem jednostkowym,
- **f.** w jakich przypadkach odpowiedź jest wykładniczo rosnąca lub malejąca, a kiedy oscylacyjno rosnąca, malejąca lub stała.

2. Zbadać jak zmienia się charakterystyka transmitancji (amplitudy i fazy) w zależności od rozkładu biegunów i zer na płaszczyźnie Z.

Badania przeprowadzić dla przypadków:

- **a.** sygnał wykładniczy $\mathbf{h(n) = e^{-an}}$, przy różnych parametrach a,
- **b.** sygnał oscylacyjno-gasnący $\mathbf{h(n) = e^{-an} \cos(\omega n)}$, przy różnych parametrach a i ω.

Literatura

1. Openheim A., Schafer R.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów WKiŁ, Warszawa 1979
2. S. Haykin: Systemy Telekomunikacyjne Tom 1 i 2, WKiŁ, Warszawa 2004