

SYGNAŁY I SYSTEMY - LABORATORIUM

REPREZENTACJE ORTOGONALNE SYGNAŁÓW

Opracował: dr inż. Andrzej JAKUBIAK

Warszawa 1995

I. PODSTAWY TEORETYCZNE

Każdy sygnał, spełniający pewne warunki, może być przedstawiony w określonym przedziale czasu w postaci sumy innych sygnałów, pomnożonych przez odpowiednie współczynniki niezależne od czasu. Jest to analogia do wektora w przestrzeni N -wymiarowej, który można przedstawić jako kombinację liniową wektorów ortogonalnych (suma wektorów poszczególnych osi, pomnożonych przez współczynniki skalarne).

Taka operacja ma na celu przede wszystkim reprezentację sygnału za pomocą kombinacji liniowej sygnałów prostych, wygodnych w analizie, szczególnie w przetwarzaniu w systemach liniowych. Najczęściej do tej analizy używa się samych współczynników rozwinięcia, co znakomicie upraszcza obliczenia.

Załóżmy, że pewien sygnał $f(t)$ w ograniczonym przedziale czasu (t_1, t_2) ma skończoną energię:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (1)$$

Załóżmy także, że dysponujemy tak zwanym ortogonalnym zbiorem sygnałów $\{g_n(t)\}$ w przedziale czasu (t_1, t_2) , gdzie $n = 1, 2, \dots, N$. Ortogonalność oznacza spełnienie następujących warunków:

$$\int_{t_1}^{t_2} g_m(t) \cdot g_n^*(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \neq n \\ K_n & \text{dla } m = n \end{cases} \quad (2)$$

gdzie $*$ oznacza sygnał sprzężony (istotne tylko w przypadku sygnałów zespolonych), K_n jest współczynnikiem niezależnym od czasu.

Jeżeli $K_n = 1$ dla każdego n to zbiór $\{g_n(t)\}$ nazywa się zbiorem ortonormalnym.

Przy spełnieniu powyższych założeń sygnał $f(t)$ można przedstawić w przedziale czasu (t_1, t_2) jako następującą kombinację liniową:

$$f(t) = \sum_{n=1}^N C_n \cdot g_n(t) \quad (3)$$

gdzie współczynniki C_n wyrażają się zależnością:

$$C_n = \frac{1}{K_n} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_n^*(t) dt \quad (4).$$

Wzór (3) przedstawia tak zwany *uogólniony szereg Fouriera*, przy czym n może przyjmować wartości całkowite nie tylko od 1 do N , ale także od $-\infty$ do $+\infty$.

Na podstawie (3) i (4) można wyznaczyć energię sygnału $f(t)$ w przedziale czasu (t_1, t_2) , co prowadzi do tak zwanej uogólnionej równości Parsewala:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^N K_n |C_n|^2 \quad (5).$$

Zasadnicze znaczenie dla celów analizy sygnału i jego przetwarzania ma wybór zbioru funkcji ortogonalnych. Istnieje wiele takich zbiorów, na przykład wielomiany Legendre'a, zbiory funkcji trygonometrycznych, wykładniczych itd.

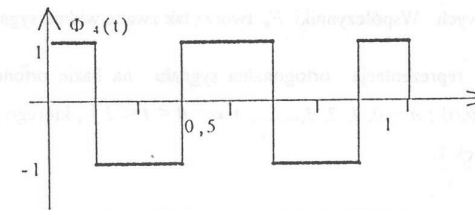
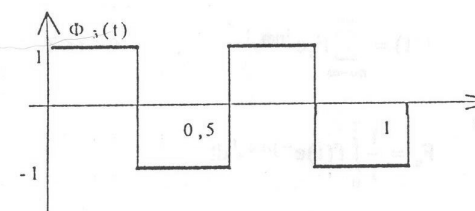
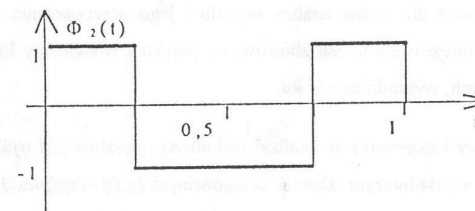
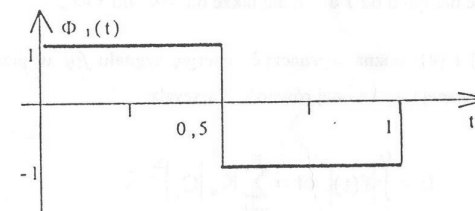
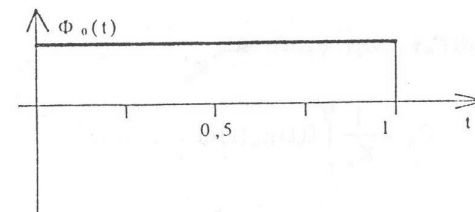
Powszechnie znany i stosowany w analizie widmowej sygnałów jest *wykładniczy szereg Fouriera*, oparty właśnie na wykładniczym zbiorze ortogonalnym $\{g_n(t) = \exp(jn\omega_0 t); n = -\infty, \dots, +\infty; 0 < t < T\}$, gdzie $\omega_0 = 2\pi/T$ a j jest jednostką urojoną. Zależności (3) i (4) przyjmują postać:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad 0 < t < T \quad (6)$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (7).$$

Wykładniczy szereg Fouriera dany zależnością (6) jest szczególnie przydatny w przypadku sygnałów okresowych. Współczynniki F_n tworzą tak zwane widmo sygnału.

Inny przykład to reprezentacja ortogonalna sygnału na bazie ortonormalnego zbioru funkcji Walsha $\{g_n(t) = \Phi_n(t); n = 0, 1, 2, 3, \dots, +\infty; 0 < t < 1\}$, którego pięć pierwszych wyrazów przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Pięć pierwszych funkcji Walsha.

W zasadzie dowolny zbiór funkcji $\{f_i(t); i = 1, \dots, M\}$ można przekształcić w zbiór ortonormalny $\{g_i(t); i = 1, \dots, N\}$ w przedziale czasu $t_1 < t < t_2$, pod warunkiem, że każda funkcja $f_i(t)$ ma skończoną energię w tym przedziale.

Do tego celu służy procedura Gramma-Schmidta, której algorytm obliczeń jest następujący:

$$1. \quad g_1(t) = \frac{f_1(t)}{\sqrt{E_1}}, \quad \text{gdzie } E_1 = \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) dt;$$

$$2. \quad g_2(t) = \frac{\Theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}, \quad \text{gdzie } \Theta_2(t) = f_2(t) - g_1(t) \int_{t_1}^{t_2} f_2(t) g_1(t) dt,$$

$$E_2 = \int_{t_1}^{t_2} \Theta_2^2(t) dt;$$

$$k. \quad g_k(t) = \frac{\Theta_k(t)}{\sqrt{E_k}}, \quad \text{gdzie } \Theta_k(t) = f_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} g_i(t) \int_{t_1}^{t_2} f_k(t) g_i(t) dt$$

$$E_k = \int_{t_1}^{t_2} \Theta_k^2(t) dt;$$

Ilość wyrazów $g_i(t)$ może być mniejsza lub równa ilości funkcji $f_i(t)$: $N \leq M$, ten pierwszy przypadek zachodzi wtedy, gdy którakolwiek z funkcji $f_i(t)$ jest kombinacją liniową dowolnej liczby innych ze zbioru $\{f_i(t)\}$.

2. PRZEBIEG ĆWICZENIA

Przed rozpoczęciem pracy należy zapoznać się z DODATKIEM oraz upewnić się, że klawiatura komputera jest przełączona w tryb pisania małymi literami.

Ćwiczenie należy wykonywać według poniższego schematu i zgodnie z poleceniami prowadzącego.

1. Uruchomić Windows poleceniem 'win <ENTER>';
2. Z grupy 'MATLAB for Windows' uruchomić myszką ikonę programu 'MATLAB';
3. Uruchomić program poprzez wpisanie 'ortog <Enter>' w oknie komend MATLABa. Na ekranie ukaże się menu oraz pusty obrazek;
4. Zapoznać się z przebiegiem funkcji Walsha poprzez wybranie myszką z menu przycisku 'Generator Walsha';
5. Przerysować 5 pierwszych funkcji do sprawozdania;
6. Wybrać z menu opcję 'Wybór funkcji' - ukaże się kolejne menu z dostępnymi funkcjami;
7. Wybrać funkcję wskazaną przez prowadzącego ćwiczenie. Jeżeli prowadzący zada funkcję, której nie ma w pakiecie, to należy wybrać pozycję 'Dowolna', po czym wpisać w dolnym małym okienku dialogowym postać tej funkcji i nacisnąć <Enter>;
8. Przerysować zadaną funkcję do sprawozdania;
9. Obliczyć współczynniki C_n rozwinięcia tej funkcji na bazie zbioru funkcji Walsha, ilość tych współczynników wyznacza prowadzący ćwiczenie, wyniki obliczeń umieścić w sprawozdaniu;
10. Naszkicować wykresy czasowe funkcji:
 - a) teoretyczny,
 - b) otrzymany po złożeniu z funkcji Walsha;
11. Z menu 'Sygnały' wybrać 'Close' żeby powrócić do głównego menu;
12. Wybrać opcję 'Obliczenia' - otworzy się okno, na dole którego należy wpisać taką liczbę wyrazów szeregu Walsha, na jaką została rozłożona zadana funkcja (max. 16), nacisnąć <Enter>;
13. Na ekranie zostaną wyświetlone:
 - a) współczynniki rozwinięcia,
 - b) wykres funkcji otrzymany po złożeniu z funkcji Walsha (w kolorze żółtym),
 - c) wykres funkcji teoretyczny (w kolorze fioletowym);
14. Przepisać i naszkicować dane z pkt. 13, porównać z własnymi obliczeniami (pkt.9 i 10);
15. Obliczyć moc średnią zadanej funkcji:
 - a) na podstawie przebiegu teoretycznego,
 - b) na podstawie obliczonych współczynników rozwinięcia;

16. Z menu głównego wybrać pozycję 'Porównanie mocy', następnie uaktywnić okno komend MATLABa, po czym posłużyć się kursorem do ewentualnego przewinięcia strony.
17. W sprawozdaniu porównać wyniki obliczeń z pkt. 15 oraz 16;
18. Z menu głównego wybrać pozycję 'Ortogonalizacja' a następnie wpisać podane przez prowadzącego wzory trzech funkcji, przeznaczonych do ortogonalizacji - kliknąć w pierwszym szarym okienku, wpisać postać pierwszej funkcji, nacisnąć <Enter>, powtórzyć to samo w drugim i trzecim szarym okienku, odpowiednio dla drugiej i trzeciej funkcji.
19. Za pomocą procedury Gramma-Schmidta, na bazie funkcji z pkt. 18, wyznaczyć zbiór funkcji ortogonalnych. W sprawozdaniu umieścić obliczenia i szkice funkcji;
20. Uruchomić proces ortogonalizacji naciskając myszką przycisk 'Ortogonalizuj', znajdujący się w lewym dolnym rogu ekranu. Przerysować do sprawozdania otrzymane przebiegi, porównać z wynikami z pkt. 19;
21. Zamknąć menu poprzez wybór opcji 'Close', następnie zakończyć pracę w MATLABie (z menu 'File' wybierając 'Exit MATLAB').

3. WYKAZ LITERATURY

- [1] M.Roden: Systemy telekomunikacyjne analogowe i cyfrowe, WNT 1983
- [2] J.Szabatin: Podstawy teorii sygnałów, WKiŁ 1990.

4. DODATEK

Ćwiczenie zostało oprogramowane w języku MATLAB (PC-MATLAB 4.0), pracującym pod kontrolą WINDOWS 3.1.

MATLAB służy do modelowania i rozwiązywania zagadnień matematycznych, szczególnie takich, które nie dają się zapisać w postaci uniwersalnych algorytmów obliczeniowych. Jest interpreterem - stąd stosunkowo wolno realizuje postawione zadania, ale jednocześnie dysponuje wieloma gotowymi narzędziami, gotowymi do zastosowania bez potrzeby ich tworzenia. Nie ma również potrzeby deklarowania typów ani rozmiarów danych.

Specyficzną cechą MATLABa jest traktowanie każdej zmiennej jako macierzy, w szczególności wielkości skalarne są traktowane jako macierze o wymiarach 1x1. W związku z tym w MATLABie są definiowane dwa typy operatorów:

1. służące do przeprowadzania obliczeń na macierzach:

- + sumowanie macierzy
- odejmowanie macierzy
- * mnożenie macierzy
- / dzielenie macierzy
- ' transpozycja macierzy
- ^ potęgowanie macierzy

2. operatory tablicowe używane do wykonywania obliczeń na odpowiadających sobie parach elementów dwóch macierzy:

- * mnożenie par elementów
- ./ dzielenie par elementów
- .^ potęgowanie każdego elementu z pary.

Kropka operatorów tablicowych musi być oddzielona spacją od poprzedzającej ją liczby.

Standardowo program rozróżnia litery małe i duże. Nazwy funkcji są pisane tylko małymi literami i tylko takimi należy się posługiwać podczas pracy z programem 'ortog'. Przy definiowaniu funkcji należy używać operatorów tablicowych (poprzedzone kropką).

Jako wyniki obliczeń mogą pojawiać się, oprócz liczb, również inne napisy, jak na przykład:

- Inf - wartość nieskończona,
- NaN - wynik dzielenia 0/0 lub ∞/∞ .

Program 'ortog' korzysta z bibliotecznych funkcji całkowania (metodą Newtona-Cotesa) oraz ortogonalizacji metodą dyskretnej procedury Gramma-Schmidta, co obarcza wyniki odpowiednimi błędami.