

# SYGNAŁY, MODULACJA I SYSTEMY

## Próbkowanie sygnałów

### Wstęp

W licznych zastosowaniach praktycznych, sygnały muszą mieć postać cyfrową. Obecnie dotyczy to większości przypadków, w których jest wykorzystywane przetwarzanie sygnałów. Oznacza to konieczność operowania dyskretnymi wartościami czasu, dla których sygnał jest określony, jak i dyskretnymi wartościami samego sygnału. Jedynie taka postać sygnału, nawet jeśli pierwotnie jest on ciągły, pozwala na poddawanie go zamierzonym operacjom przetwarzania, które w przeważającej większości przypadków opierają się na technice cyfrowej. Jest tak we wszystkich operacjach cyfrowego przetwarzania służących detekcji, szacowaniu parametrów, analizie widmowej, transmisji w systemach cyfrowych, rejestracji i przechowywaniu sygnału oraz wielu innych. Przetwarzanie ciągłego sygnału  $x(t)$  w równoważny mu, w określonym sensie, dyskretny sygnał  $\{x_n\}$  jest nazywane próbkowaniem. Przyporządkowywanie wartościom sygnału dopuszczalnych wartości dyskretnych nosi nazwę kwantyzacji. Ćwiczenie jest poświęcone omówieniu operacji próbkowania i ilustracji wpływu parametrów próbkowania na jakość odtwarzania.

### Definicja operacji próbkowania

Próbkowaniem nazywa się operację przyporządkowania ciąglemu sygnałowi  $x(t)$ , określone w ogólnym przypadku w nieskończonym przedziale czasu  $-\infty < t < \infty$ , ciągu jego próbek  $\{x_n\}$   $x_n = x(t_n)$ , określonych w chwilach czasowych  $t_n$ .

$$x(t); t \in \mathbb{R} \quad x_n = x(t_n) \quad \{x_n; n \in \mathbb{N}\}; \quad (1)$$

Najczęściej chwile czasowe  $t_n$  są równomiernie rozmieszczone na osi czasu a stała odległość między nimi  $T_p$  jest wyznaczona przez częstotliwość próbkowania  $f_p$  (lub pulsację próbkowania  $\omega_p$ )

$$T_p = \frac{1}{f_p} = \frac{2\pi}{\omega_p} \quad (2)$$

Wynikiem próbkowania jest więc ciąg próbek sygnału, odpowiadających jego wartościom w chwilach

$$t_n = nT_p \quad (3)$$

Oczywiście jest pożądaną aby przejście od ciągłej funkcji  $x(t)$  do ciągu jej próbek  $\{x_n\}$  nie było związane z utratą informacji o sygnale. W przypadku sygnałów zdeterminowanych naturalny jest postulat aby ciąg próbek umożliwiał odtworzenie kształtu sygnału poddanego wcześniej próbkowaniu. Również w przypadku sygnałów losowych żądanie to jest uzasadnione, gdyż poddawanie próbkowaniu jego konkretnej realizacji powinno gwarantować możliwość jej wiernego odtworzenia. W jakim stopniu odtworzenie to jest możliwe oraz jaki stopień wierności jest możliwy do osiągnięcia było przedmiotem dociekań teoretycznych, które doprowadziły do sformułowania twierdzenia o próbkowaniu. Zostanie ono podane poniżej po przedstawieniu rozważań, które doprowadziły do jego sformułowania.

Widmowy opis operacji próbkowania

Przyjmijmy, że ciągły sygnał  $x(t)$  ma widmo  $X_a(\Omega)$

$$X_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (4)$$

Dyskretny sygnał  $\{x_n\}$ , odpowiadający sygnałowi ciągłemu  $x(t)$ , można przybliżyć funkcją

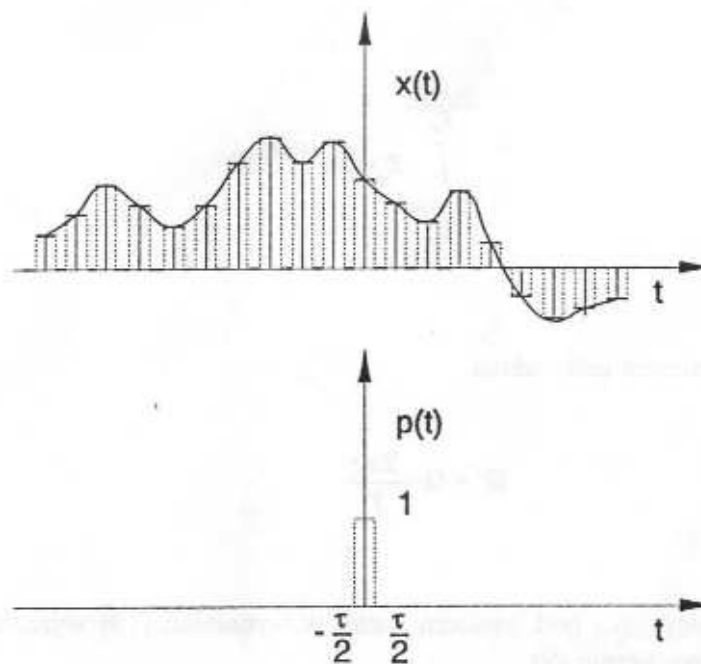
$$x_n = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{t=(n-\frac{1}{2})T_p}^{t=(n+\frac{1}{2})T_p} x(t) p(t-nT_p) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-nT_p) dt \quad (5)$$

a widmo sygnału dyskretnego można, zgodnie z (4), przedstawić w następujący sposób

$$\begin{aligned} X_a^p(\Omega) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau} \int_{t=(n-\frac{1}{2})T_p}^{t=(n+\frac{1}{2})T_p} x(t) p(t-nT_p) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-nT_p) e^{-j\Omega t} dt = \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\Omega n T_p} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (6)$$

W (5) i (6) wykorzystano pomocniczą funkcję prostokątną  $p(t)$

$$p(t) = \begin{cases} 0; & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 1; & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (7)$$



rys.1 Sygnał ciągły  $x(t)$ , przybliżenie jego wersji dyskretnej  $x_d(t)$  oraz pomocnicza funkcja  $p(t)$ .

Wykorzystując (4) można próbki  $x_n$ , sygnału ciągłego, pobrane w chwilach  $t_n = nT_p$  wyrazić następującą zależnością

$$x_n = x(nT_p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega) e^{j\Omega nT_p} d\Omega \quad (8)$$

Widmo  $X(e^{j\omega})$  jest okresową funkcją częstotliwości kołowej  $\omega$  o okresie  $2\pi$ . Wynika to z okresowości zespolonej funkcji wykładniczej  $e^{j\omega}$ , której funkcją jest rozpatrywane widmo. Wychodząc zatem z założenia, że jest możliwe rozwinięcie tej funkcji na szereg Fouriera uzyskuje się następujące wyrażenie, określające zależność próbki  $x_n$  sygnału  $x(t)$  od widma  $X(e^{j\omega})$

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (9)$$

Jest pożądanie ustalenie zależności między widmami  $X(\Omega)$  i  $X(e^{j\omega})$  na podstawie porównania zależności (8) i (9). Można to osiągnąć wyrażając całkę w wyrażeniu (8) w postaci sumy całek oznaczonych na przedziałach o długości  $2\pi$ , pokrywających cały nieskończony przedział  $(-\infty, \infty)$

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{(2r-1)\pi}{T_p}}^{\frac{(2r+1)\pi}{T_p}} X_a(\Omega) e^{j\Omega n T_p} d\Omega \quad (10)$$

Wprowadzając nową zmienną całkowania

$$\Omega' = \Omega - \frac{2\pi r}{T_p} \quad (11)$$

można każdą całkę występującą pod znakiem sumy w wyrażeniu (10) wyrazić w sposób analogiczny do całki z wyrażenia (9)

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T_p}}^{\frac{\pi}{T_p}} X_a\left(\Omega' + \frac{2\pi r}{T_p}\right) e^{j\Omega' n T_p} e^{j2\pi r n} d\Omega' \quad (12)$$

Zamieniając kolejność całkowania i sumowania oraz uwzględniając, że  $e^{j2\pi r n} = 1$  otrzymuje się

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T_p}}^{\frac{\pi}{T_p}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\Omega + \frac{2\pi r}{T_p}\right) e^{j\Omega n T_p} d\Omega \quad (13)$$

Podstawiając  $\Omega = \omega/T_p$  otrzymuje się wzór mający strukturę podobną do wzoru (9)

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{T_p} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\omega}{T_p} + \frac{2\pi r}{T_p}\right) e^{j\omega t} d\Omega \quad (14)$$

Można zatem przyjąć, że zachodzą następujące zależności między widmem sygnału analogowego  $X(\Omega)$  widmem odpowiadającego mu sygnału dyskretnego  $X(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_p} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\omega}{T_p} + \frac{2\pi r}{T_p}\right) \quad (15)$$

$$X(e^{j\Omega T_p}) = \frac{1}{T_p} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\Omega + \frac{2\pi r}{T_p}\right) \quad (16)$$

Widmo  $X(e^{j\omega})$  ciągu próbek  $\{x_n\}$  ma postać funkcji okresowej, która powstaje z sumowania replik funkcji  $X_a(\omega/T_p)$  poprzysuwanych wzdłuż osi  $\omega$  o wielokrotności  $2\pi/T_p$ . Jeżeli zatem widmo sygnału ciągłego nie ma składowych wykraczających poza pewien przedział  $[-\Omega_0, \Omega_0]$  a okres próbkowania  $T_p$  spełnia warunek

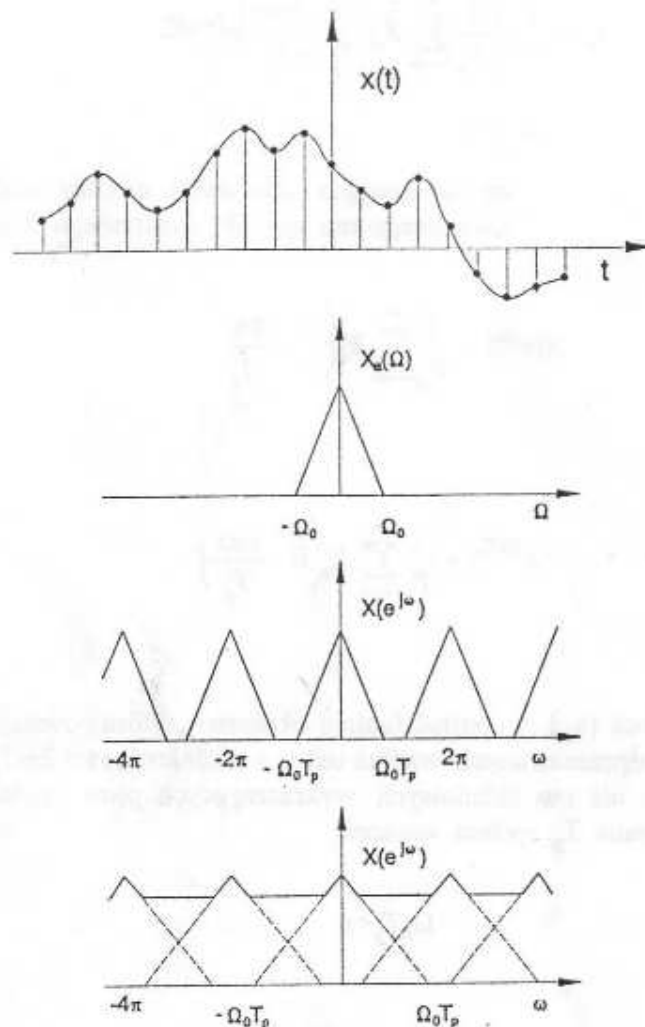
$$\Omega_0 T_p < \pi \quad (17)$$

pociągający za sobą

$$f_p \geq \frac{\Omega_0}{\pi} = \frac{2\pi F_0}{\pi} = 2F_0 \quad (18)$$

to wewnątrz przedziału  $[-\pi, \pi]$  widmo  $X(e^{j\omega})$  ma kształt identyczny z kształtem widma  $X_a(\Omega)$  z dokładnością do zmiany skali osi pulsacji. W przeciwnym przypadku kształt  $X(e^{j\omega})$  dla  $-\pi < \omega < \pi$  nie jest repliką  $X_a(\Omega)$ . Przykładowe widmo sygnału ciągłego i odpowiadających mu sygnałów dyskretnych dla dwóch częstotliwości próbkowania przedstawiono na rys.2. Łatwo można zauważyć, że spełnienie warunku (18) pozwala odtwarzać widmo sygnału ciągłego na podstawie widma sygnału dyskretnego. W tym celu wystarczy bowiem pomnożyć widmo  $X(e^{j\omega})$  przez prostokątną funkcję okna  $W(\omega)$  o postaci

$$W(\omega) = \begin{cases} 1; & -\pi < \omega < \pi \\ 0; & \omega < -\pi; \omega > \pi \end{cases} \quad (19)$$



rys.2 Widma sygnału ciągłego i odpowiadających mu sygnałów dyskretnych dla dwóch częstotliwości próbkowania

Otrzymuje się wtedy widmo sygnału ciągłego  $X_a(\Omega)$

$$X(e^{j\Omega T_p})W(\Omega T_p) = \left[ \frac{1}{T_p} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a\left(\Omega + \frac{2\pi r}{T_p}\right) \right] W(\Omega T_p) = \frac{1}{T_p} X_a(\Omega) \quad (20)$$

Przedstawione powyżej rozumowanie pozwala sformułować następujące twierdzenie znane pod nazwą twierdzenia o próbkowaniu.

Jeżeli ciągły sygnał  $x(t)$ , którego widmo  $X_a(\Omega)$  nie ma składowych poza przedziałem  $(-\Omega_0, \Omega_0)$ , zostanie poddany próbkowaniu z częstotliwością nie mniejszą niż  $2F_0$ , przy

czym  $2\pi F_0 = \Omega_0$ , to uzyskany ciąg próbek  $\{x_n\}$  zawiera wszystkie niezbędne informacje umożliwiające odtworzenie kształtu sygnału  $x(t)$ .

Twierdzenie o próbkowaniu zostało sformułowane niezależnie przez Shannona i Kotielnikowa i często jest nazywane twierdzeniem Shannona-Kotielnikowa

### Odtwarzanie sygnału

Wiadomo, że mnożenie widm jest równoważne splataniu ich oryginałów. Jeśli zatem uznać, że oryginałem widma  $X(e^{j\omega})$  jest sygnał o postaci

$$x_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - nT_p) \quad (21)$$

a oryginałem okna  $W(\omega)$  jest funkcja  $w(t)$

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (22)$$

to odtwarzany sygnał ciągły  $x(t)$  można wyrazić w następujący sposób

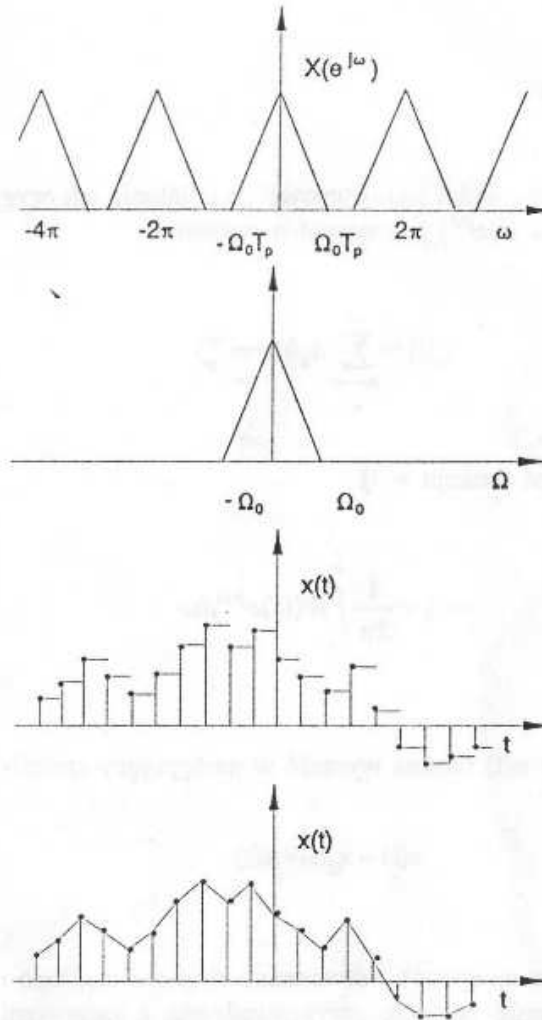
$$x(t) = x_d(t) * w(t) \quad (23)$$

Kształt funkcji okna wpływa na sposób odtwarzania sygnału ciągłego na podstawie ciągu jego próbek. Jeśli próbkowanie zostanie przeprowadzone z zachowaniem warunku (18), okno  $W(\omega)$  będzie miało postać

$$W(\omega) = \begin{cases} 1; & |\omega| \leq \Omega_0 T_p \\ 0; & |\omega| > \Omega_0 T_p \end{cases} \quad (24)$$

to funkcja  $w(t)$ , zwana funkcją interpolującą, przyjmie postać

$$w(t) = \frac{\Omega_0 \sin(\Omega_0 t)}{\pi \Omega_0 t} \quad (25)$$



rys.3 Ilustracja idei odtwarzania sygnału i dwie różne postaci sygnału odtworzonego.

a odtwarzanie kształtu sygnału  $x(t)$  będzie wierne. W każdym innym przypadku (niewłaściwie dobrana częstotliwość próbkowania, inny niż prostokątny kształt okna  $W(\omega)$ ) odtwarzanie prowadzi do kształtu  $x_1(t)$  różniącego się od  $x(t)$ . Na rys.3 pokazano 2 różne kształty uzyskiwane po odtwarzaniu. Dokładność odtwarzania może być określona ilościowo za pomocą błędu średniokwadratowego  $\epsilon^2$

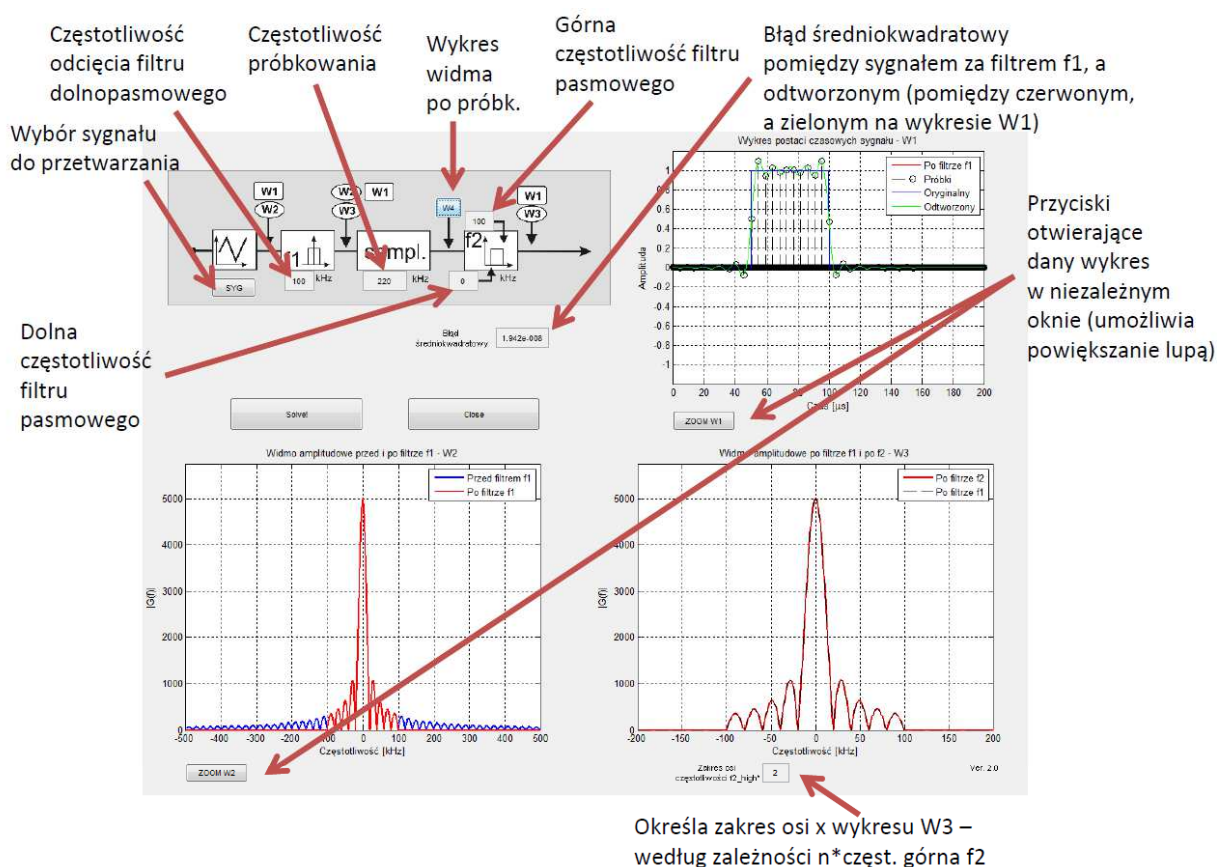
$$\epsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - x_1(t)]^2 dt \quad (26)$$



Poprawność operacji próbkowania zależy od spełnienia przez widmo próbkowanego sygnału warunku sformułowanego w twierdzeniu o próbkowaniu i właściwie wybranej częstotliwości próbkowania zgodnie z (18). Bardzo często rzeczywiste sygnały mają widma, których szerokość pasma jest zbyt duża aby wymagana przez nie częstotliwość próbkowania była możliwa do zaakceptowania. W takich przypadkach przeprowadza się wstępną filtrację ograniczającą szerokość widma. Wprowadza to oczywiście zniekształcenia sygnału poddawane próbkowaniu, a w konsekwencji niedokładności przy jego odtwarzaniu. Ćwiczenie jest poświęcone badaniu jakości próbkowania prostych sygnałów.

## Przebieg ćwiczenia

Aby uruchomić skrypt należy wpisać z linii poleceń w programie MatLab *symse\_sampl*. Na ekranie powinno pojawić się okno, takie jak przedstawione na **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odsyłacza..** Początkowo okna wykresów będą puste, należy: a). wybrać sygnał (naciśnąć przycisk SYG w górnej lewej części okna), b). nacisnąć przycisk SOLVE. Opis podstawowych funkcji skryptu został przedstawiony na **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odsyłacza..** W górnej lewej części okna skryptu znajduje się schemat z etykietami (W1, W2, W3); przedstawiają one miejsca w procesie przetwarzania sygnału, w który sporządzane są wykresy.



Rys. 1. Opis panelu skryptu używanego w ćwiczeniu

1. Dla sygnału okresowego  $\sin$  przeprowadzić następujące operacje:
  - a. znaleźć minimalną szerokość filtra  $f_1$  nie zniekształcającą widma sygnału, a jednocześnie minimalizującą szerokość filtra;
  - b. wyznaczyć częstotliwość Nyquista i częstotliwość próbkowania, ustawić  $f_2 = f_1$ ;
  - c. naszkicować widmo po próbkowaniu (w tym celu nacisnąć przycisk  $W4$ , jeśli to konieczne posłużyć się lupą);
  - d. ustawić oba filtry na wartość wyznaczoną w punkcie  $a$ , a następnie zapisać błąd średniokwadratowy, dla następujących wartości częstotliwości próbkowania:
    - i.  $f'_S = 0,5 \cdot f_S$ ,
    - ii.  $f'_S = 0,9 \cdot f_S$ ,
    - iii.  $f'_S = 1 \cdot f_S$ ,
    - iv.  $f'_S = 1,2 \cdot f_S$ ,
    - v.  $f'_S = 2 \cdot f_S$ ,
 gdzie  $f_S$  jest częstotliwością próbkowania wyznaczoną w punkcie  $b$ .  
 Skomentować otrzymane wyniki. **Uwaga: program akceptuje tylko całkowite wartości  $f_s$ , należy dokonywać zaokrągleń! Ponadto, wartości błędu poniżej  $10^{-4}$  należy po prostu traktować jak 0);**
  - e. czy dla sygnału  $\sin^2$  wyznaczona minimalna szerokość filtra (dla  $\sin$ ) i częstotliwość próbkowania będzie wystarczająca? **Skomentować.**
2. Wykreślić zależność błędu średniokwadratowego od częstotliwości próbkowania dla pojedynczego impulsu prostokątnego (szeroki) ograniczonego pasmowo filtrem  $f_1 = 100\text{kHz}$ , ( $f_2 = f_1$ ), zakres badania  $f_s \in (50\text{kHz}; 300\text{kHz})$ ; Skomentować otrzymany wykres. Czy ustawianie częstotliwości próbkowania powyżej dwukrotnej częstotliwości Nyquista jest uzasadnione (Podpowiedź: Przeanalizować wykres  $W4$ )?;
3. Jak w punkcie 2 tylko dla impulsu wykładniczego. Skomentować różnice; co jest charakterystycznego w widmie sygnału okresowego?
4. Dla sygnału *pasmowy* zbadać czy możliwe jest takie dobranie częstotliwości próbkowania i szerokości  $f_1$  i filtra  $f_2$  (wykorzystując filtr pasmowo przepustowy) aby pomimo częstotliwości próbkowania poniżej wymaganej przez twierdzenie o próbkowaniu błąd średniokwadratowy był bliski 0? Skomentować otrzymane wyniki. Jakie warunki musi spełniać sygnał i częstotliwość próbkowania aby to było możliwe (próbkowanie poniżej cz. próbkowania wyznaczonej przez tw. o próbkowaniu bez zniekształceń)?